К21. 23.
$A(4,0,3)$, $B(0,0,3)$,
$C(2,2,1)$, $D(3,5,0)$,
$v_{Bx}=0$, $v_{By}=12$, $v_{Bz}=0$.

К21. 24.
$A(3,0,1)$, $B(0,0,4)$,
$C(1,4,4)$, $D(2,2,0)$,
$v_{Bx}=6$, $v_{By}=0$, $v_{Bz}=0$.

К21. 25.
$A(4,0,3)$, $B(0,0,4)$,
$C(2,4,1)$, $D(1,5,0)$,
$v_{Bx}=0$, $v_{By}=48$, $v_{Bz}=16$.

К21. 26.
$A(2,0,1)$, $B(0,0,1)$,
$C(3,3,1)$, $D(1,4,0)$,
$v_{Bx}=9$, $v_{By}=0$, $v_{Bz}=18$.

К21. 27.
$A(2,0,4)$, $B(0,0,3)$,
$C(3,3,3)$, $D(2,5,0)$,
$v_{Bx}=9$, $v_{By}=0$, $v_{Bz}=18$.

К21. 28.
$A(1,0,4)$, $B(0,0,2)$,
$C(1,3,2)$, $D(2,2,0)$,
$v_{Bx}=0$, $v_{By}=-12$, $v_{Bz}=-4$.

К21. 29.
$A(3,0,4)$, $B(0,0,4)$,
$C(0,2,3)$, $D(3,4,0)$,
$v_{Bx}=0$, $v_{By}=0$, $v_{Bz}=-6$.

К21. 30.
$A(1,0,1)$, $B(0,0,3)$,
$C(0,5,3)$, $D(1,1,0)$,
$v_{Bx}=-5$, $v_{By}=-15$, $v_{Bz}=-10$.

Пример решения

Задача. Механизм состоит из треугольной пластины ABC, скрепленной сферическими шарнирами с вертикальным стержнем CC' и с двумя наклонными CD и AA' (рис. 158). Сферические шарниры A', C', D расположены в горизонтальной плоскости xy. Известна скорость вершины B: $v_{Bx}=0$, $v_{By}=6$ м/с, $v_{Bz}=-2$ м/с и координаты вершин пластины и шарниров (в метрах): $A(4,0,3)$, $B(0,0,2)$, $C(0,4,2)$, $D(2,4,0)$. Найти угловую скорость пластины.

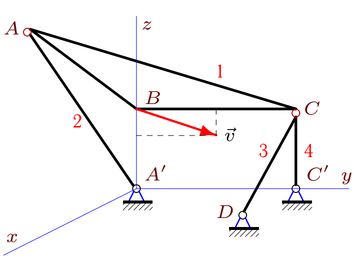

Рис. 158

Решение

Пронумеруем тела механизма. Пластина — № 1, стержни — № 2, 3, 4. Запишем три векторные уравнения, связывающие известную скорость точки B с нулевыми скоростями неподвижных точек A', C' и D. Эти уравнения соответствуют кинематическим графам (по аналогии с графами при плоском движении), рис. 159.

$$B \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} A',$$

$$B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{3} D,$$

$$B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{4} C'$$

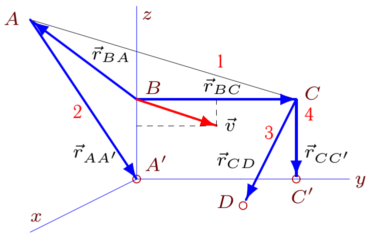

Рис. 159

В векторной форме имеем следующие соотношения

$$\vec v_{A'} = \vec v_A + \vec\omega_2 \times \vec r_{AA'} = \vec v_B + \vec\omega_1 \times \vec r_{BA} + \vec\omega_2 \times \vec r_{AA'}, \tag{9.1}$$

$$\vec v_D = \vec v_C + \vec\omega_3 \times \vec r_{CD} = \vec v_B + \vec\omega_1 \times \vec r_{BC} + \vec\omega_3 \times \vec r_{CD}, \tag{9.2}$$

$$\vec v_{C'} = \vec v_C + \vec\omega_4 \times \vec r_{CC'} = \vec v_B + \vec\omega_1 \times \vec r_{BC} + \vec\omega_4 \times \vec r_{CC'}. \tag{9.3}$$

Система (9.1–9.3) состоит из 9 скалярных уравнений и содержит четыре векторные, т. е. 12 скалярные неизвестные. Для того, чтобы замкнуть систему, требуются еще три уравнения. Они получаются из следующих очевидных соображений. Стержни AA', CC' и CD, имея сферические шарниры по концам, могут вращаться вокруг своей продольной оси с произвольной скоростью, никак не влияющей на движение пластины. Для того, чтобы замкнуть систему положим угловые скорости вращений стержней вокруг их продольных осей произвольными величинами, например нулями. Это выражается в виде равенства нулю скалярных произведений

$$\begin{aligned} &\vec\omega_2 \cdot \vec r_{A'A} = 0,\\ &\vec\omega_3 \cdot \vec r_{CD} = 0,\\ &\vec\omega_4 \cdot \vec r_{CC'} = 0. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Радиусы-векторы, входящие в эти уравнения, имеют вид

$$\vec r_{BA} = \begin{bmatrix} 4\\ 0\\ 1 \end{bmatrix},\ \vec r_{AA'} = \begin{bmatrix} -4\\ 0\\ -3 \end{bmatrix},\ \vec r_{BC} = \begin{bmatrix} 0\\ 4\\ 0 \end{bmatrix}, \vec r_{CD} = \begin{bmatrix} 2\\ 0\\ -2 \end{bmatrix},\ \vec r_{CC'} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, имеем три векторных уравнения (9.1–9.3) и три скалярных уравнения (9.4), т. е. всего 12 уравнений для четырех векторных неизвестных $\vec\omega_1$, $\vec\omega_2$, $\vec\omega_3$, $\vec\omega_4$. Перепишем эту систему в скалярной форме с учетом данных задачи. Уравнение (9.1) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\omega_{1y} - 3\omega_{2y} = 0,\\
&16 + 4\omega_{1z} - \omega_{1x} - 4\omega_{2z} + 3\omega_{2x} = 0,\\
&-8 - 4\,\omega_{1y} + 4\omega_{2y} = 0.
\end{aligned}
$$

Аналогично, запишем уравнение (9.2)

$$
\begin{aligned}
&-4\omega_{1z} - 2\omega_{3z} = 0,\\
&16 + 2\omega_{3z} + 2\omega_{3z} = 0,\\
&-8 + 4\omega_{1x} - 2\omega_{3y} = 0,
\end{aligned}
$$

и уравнение (9.3):

$$
\begin{aligned}
&-4\omega_{1z} - 2\omega_{4z} = 0,\\
&16 + 2\omega_{4x} = 0,\\
&-8 + 4\omega_{1x} = 0.
\end{aligned}
$$

Замыкают систему скалярные произведения (9.4)

$$
\begin{aligned}
&-4\omega_{2x} - 3\omega_{2z} = 0,\\
&2\omega_{3x} - 2\omega_{3z} = 0,\\
&-2\omega_{4z} = 0.
\end{aligned}
$$

Получим решение системы уравнений (в $с^{-1}$):

$$
\begin{aligned}
&\omega_{1x} = 2,\ \omega_{1y} = -3,\ \omega_{1z} = 0,\\
&\omega_{2x} = -1{,}68,\ \omega_{2y} = -1,\ \omega_{2z} = 2{,}24,\\
&\omega_{3x} = -4,\ \omega_{3y} = 0,\ \omega_{3z} = -4,\\
&\omega_{4x} = -8,\ \omega_{4y} = 0,\ \omega_{4z} = 0.
\end{aligned}
$$

Искомый вектор угловой скорости пластины имеет вид (в $с^{-1}$):

$$\vec{\omega}_1 = [2, -3, 0]^T.$$