Имеем следующие выражения для скоростей точек стержня AB, имеющего МЦС в точке P:

$$v_A = \omega_4 AP,$$
$$v_C = \omega_4 CP,$$
$$v_B = \omega_4 BP.$$

Из первого равенства находим угловую скорость стержня 4

$$\omega_4 = v_A/AP = 4v_1 r_2/(3l_4 R_2), \tag{12.15}$$

а из двух других — скорости

$$v_C = \omega_4 CP = \sqrt{13}\, v_1 r_2/(3R_2), \;\; v_B = \omega_4 BP = 5v_1 r_2/(3R_2). \tag{12.16}$$

Остается найти угловые скорости стержней 3 и 5. Поделив скорости точек A и B на длины стержней, получим

$$\omega_3 = v_A/l_3 = v_1 r_2/(l_3 R_2), \;\; \omega_5 = v_B/l_5 = 5v_1 r_2/(3l_5 R_2). \tag{12.17}$$

Подставим скорости и угловые скорости (12.15) – (12.17) в выражения для кинетических энергий (12.14). Получим

$$T_1 = \frac{m_1\, v_1^2}{2} = \frac{v_1^2}{2}, \;\; T_2 = \frac{\rho_2\, m_2 v_1^2}{2\, R_2^2} = 8\, v_1^2,$$
$$T_3 = \frac{r_2^2\, m_3\, v_1^2}{6\, R_2^2} = \frac{3\, v_1^2}{2},$$
$$T_4 = \frac{43\, r_2^2\, m_4\, v_1^2}{54\, R_2^2} = \frac{43\, v_1^2}{2},$$
$$T_5 = \frac{25\, r_2^2\, m_5\, v_1^2}{54\, R_2^2} = \frac{v_1^2}{2}.$$

Следовательно, приведенные массы тел системы (коэффициенты при $v_1^2/2$) равны $\mu_1 = 1$ кг, $\mu_2 = 16$ кг, $\mu_3 = 3$ кг, $\mu_4 = 43$ кг, $\mu_5 = 1$ кг. Суммарная приведенная масса

$$\mu = 1 + 16 + 3 + 43 + 1 = 64 \text{ кг}.$$

Д9. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема. *Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех сил, приложенных к ней* [36].

В отличие от теоремы об изменении количества движения и момента количества движения в теореме присутствуют как внешние (F_k^e), так и внутренние (F_k^i) силы. Кроме того, она имеет скалярный вид

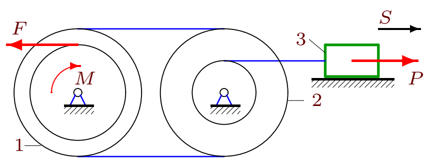
$$T_1 - T_0 = \sum_k A(F_k^e) + A(F_k^i).$$

Здесь T_0 и T_1 — кинетическая энергия системы в начальном и конечном состоянии соответственно. Для неизменяемых систем [1] работа внутренних сил $A(F_k^i)$ равна нулю. В настоящем параграфе все системы неизменяемые — нити нерастяжимые, связи идеальные.

Условия задач

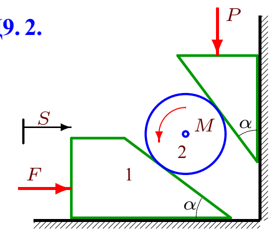
Механическая система движется под действием внешних сил. Заданы радиусы цилиндров, блоков, длины стержней и расстояние S (в сантиметрах). Радиусы инерции даны для блоков, цилиндры и стержни считать однородными. Для вариантов 1, 4, 10, 14, 20, 24, 28–30 считать, что механизм расположен в вертикальной плоскости, в остальных — в горизонтальной. Пронумерованные тела имеют массу (в килограммах), другие — принять невесомыми. Силы даны в ньютонах, моменты — в Нм. Какую скорость (см/с) приобретет брусок (клин, шток), переместившись из состояния покоя на расстояние S?

Д9. 1.



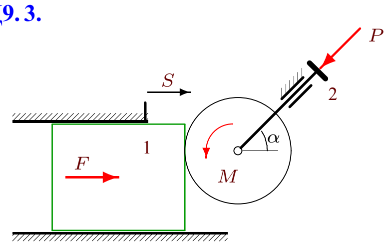
$m_1 = 64$, $m_2 = 4$, $m_3 = 6$, $r_1 = 3$, $R_1 = R_2 = 4$, $\rho_1 = 2$, $r_2 = 2$, $\rho_2 = 3$, $F = 8$, $P = 451{,}5$, $M = 8$, $S = 1$.

Д9. 2.



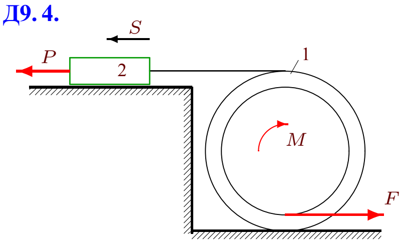
$m_1 = 0{,}2$, $m_2 = 0{,}49$, $F = 2$, $P = 21$, $M = 28$, $R = 0{,}2$ м, $S = 25{,}25$, $\cos\alpha = 0{,}8$.

Д9. 3.



$m_1 = 0{,}2$, $m_2 = 6{,}4$, $F = 43$, $M = 0{,}8$, $P = 8$, $\cos\alpha = 0{,}8$, $R = 20$, $S = 20{,}4$.

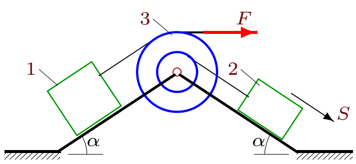
Д9. 4.



$m_1 = 100$, $m_2 = 8$, $F = 30$, $P = 245$, $M = 20$, $r = 4$, $R = 5$, $\rho = 3$, $S = 200$.

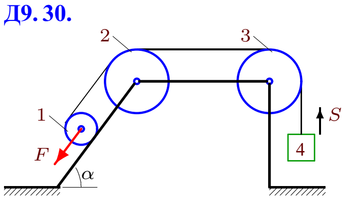
[1] Например, твердое тело.

Д9. 29.



$m_1 = 2$, $m_2 = 6$, $m_3 = 3$, $R = 3r$, $\rho = 2r$, $F = 1{,}5$, $S = 36$.

Д9. 30.



$m_1 = 10$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$, $F = 41$, $S = 1$, $\sin\alpha = 0{,}8$.

Пример решения

Задача. Между цилиндром массой $m_1 = 3$ кг, радиусом $R = 1$ м и скошенным прессом (призмой, $\cos\alpha = 3/5$) массой $m_2 = 10$ кг зажата пластина 3, скользящая по гладкой поверхности пресса (рис. 186). Масса пластины $m_3 = 5$ кг. К цилиндру приложен момент $M = 9$ Нм, к пластине — сила $F = 10$ Н, а к прессу — сила $P = 13$ Н. Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Найти скорость, которую разовьет пресс из состояния покоя, переместившись на расстояние $S = 4$ см.

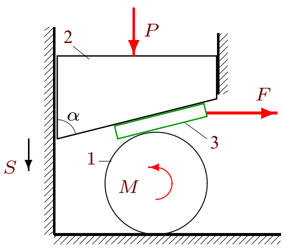


Рис. 186

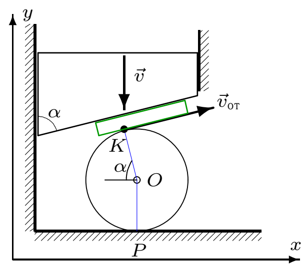


Рис. 187

Решение

При движении пресса вниз пластина, скользя по его поверхности, будет выдавливаться направо и катить в этом же направлении цилиндр, с которым она находится в зацеплении.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии плоского движения цилиндра, поступательного движения пресса и пластины:

$$T = \frac{3m_1 v_O^2}{4} + \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{m_3 v_K^2}{2},$$

где v_O — скорость оси (центра масс) цилиндра, v — искомая скорость пресса, v_K — скорость пластины. Точка K является точкой контакта цилиндра и пластины (рис. 187). Выразим скорости v_K и v_O через искомую скорость v. Введем систему координат xy и составим кинематический граф

$$P \xrightarrow[\pi/2]{1} O \xrightarrow[\pi-\alpha]{1} K\,. \tag{12.18}$$

Ему соответствуют два уравнения:

$$v_{Kx} = v_{Px} - \omega_z R\sin(\pi/2) - \omega_z R\sin(\pi-\alpha),$$
$$v_{Ky} = v_{Py} + \omega_z R\cos(\pi/2) + \omega_z R\cos(\pi-\alpha),$$

где ω_z — угловая скорость цилиндра. С учетом $v_{Px}=0$, $v_{Py}=0$, получаем отсюда следующую линейную систему:

$$\begin{aligned} v_{Kx} &= -R\omega_z(1+\sin\alpha), \\ v_{Ky} &= -R\omega_z\cos\alpha. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Пластина совершает сложное движение. Относительное движение пластины — скольжение по прессу, переносное движение — движение пресса. По теореме о сложении скоростей

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}},$$

где $\vec{v}_K$ — абсолютная скорость точки K, определяемая графом (12.18), $\vec{v}_{\text{п}}$ — переносная скорость пресса (направлена вниз). В проекциях на оси координат имеем

$$\begin{aligned} v_{Kx} &= v_{\text{от}}\sin\alpha, \\ v_{Ky} &= -v + v_{\text{от}}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Из (12.19) и (12.20) следует система уравнений для $v_{\text{от}}$ и ω_z

$$\begin{aligned} -R\omega_z(1+\sin\alpha) &= v_{\text{от}}\sin\alpha, \\ -R\omega_z\cos\alpha &= -v + v_{\text{от}}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{12.21}$$

Решаем эту систему и находим

$$\begin{aligned} \omega_z &= -(v/R)\,\mathrm{tg}\,\alpha, \\ v_{\text{от}} &= \frac{v\,(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}. \end{aligned} \tag{12.22}$$

При этом из (12.19) или из (12.20) получаем

$$v_{Kx} = v\,(1+\sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad v_{Ky} = v\sin\alpha. \tag{12.23}$$

Квадрат скорости пластины

$$v_K^2 = v_{Kx}^2 + v_{Ky}^2 = \frac{2v^2\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

Осталось найти скорость центра цилиндра v_O. Так как угловая скорость цилиндра уже выражена через v, то эта задача простая. Составим граф

$$P \xrightarrow[\pi/2]{1} O\,, \tag{12.24}$$

откуда с учетом (12.22) получим

$$v_{Ox} = v_{Px} - \omega_z R \sin(\pi/2) = v \operatorname{tg}\alpha. \tag{12.25}$$

В результате кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{v^2}{2}\left(\frac{3\,m_1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + m_2 + \frac{4\,m_3 \sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}\right).$$

Подставляя в это выражение числовые данные, получаем

$$T = \frac{v^2}{2}((3/2)\cdot 3\cdot 16/9 + 10 + (32/5)\cdot 5) = \frac{v^2}{2}(8+10+32) = 25\,v^2.$$

Найдем работу внешних сил, приложенных к системе на указанном перемещении. Так как система расположена в горизонтальной плоскости, то силы тяжести работу не совершают. Работа силы P, приложенной к прессу на перемещении S равна $A_P = PS$. Работа силы F равна $A_F = F_x \Delta_{Kx}$, где Δ_{Kx} — смещение пластины вдоль оси x. Учитывая соотношение скоростей (12.23), получим, что перемещение Δ_{Kx} связано со смещением пресса по формуле

$$\Delta_{Kx} = S\,(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда,

$$A_F = F\,S\,(1+\sin\alpha)\ \operatorname{tg}\alpha.$$

И, наконец, работа момента на угле поворота цилиндра равна $M\varphi$. Интегрируя по времени (12.22), получим $\varphi = -(S/R)\ \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, работа момента имеет вид $A_M = -M\,(S/R)\ \operatorname{tg}\alpha$. Суммарная работа

$$A = A_P + A_F + A_M = S\,(P + F\,(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha - (M/R)\ \operatorname{tg}\alpha),$$

или, с учетом данных задачи,

$$A = 0{,}04\,(13 + 10\cdot(9/5)\cdot(4/3) - (9/1)\cdot(4/3)) = 1\ \text{Нм}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = A.$$

Но так как в начальном состоянии система находилась в покое, и $T_0 = 0$, то отсюда получаем уравнение для определения скорости $25v^2 = 1$. Находим скорость пресса

$$v = \sqrt{1/25} = 0{,}2\ \text{м/с} = 20\ \text{см/с}.$$