

Аналогичные соотношения имеем из контакта колес 3 и 4, 4 и 5:

$$\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4, \quad \omega_4 R_4 = \omega_5 R_5. \quad (5.8)$$

Кроме того, имеем уравнение, выражающее расстояние между крайними осями механизма

$$R_1 + r_2 + R_2 + R_3 + r_3 + r_4 + R_4 + R_5 = 68. \quad (5.9)$$

Уравнения (5.6-5.9) образуют систему пяти уравнений для пяти неизвестных  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ ,  $R_1$  и  $R_5$ . Решая эту систему находим:  $\omega_2 = 23,1 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_3 = 27,3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_4 = 27,3 \text{ с}^{-1}$ ,  $R_1 = 7 \text{ см}$ ,  $R_5 = 3 \text{ см}$ .

## Глава 6

### Плоское движение тела

В плоском движении тела каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой фиксированной плоскости. Само тело вовсе не обязательно должно быть плоским. Говорить о скорости тела или его ускорении в общем случае не имеет смысла: тело состоит из множества точек, каждая из которых может иметь свою скорость и ускорение. Исключение составляет поступательное движение тела, при котором равны скорости и ускорения всех точек. Кроме того, в некоторых задачах иногда говорят, например, о скорости катящегося цилиндра или о скорости автомобиля, подразумевая при этом скорость точек центральной оси цилиндра или скорость кузова автомобиля, если принять его за точку.

Угловая скорость и ускорение для плоского движения — векторные величины, но их направления всегда перпендикулярны плоскости движения. Введем декартову систему координат, в которой плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью движения. Тогда угловая скорость  $\vec{\omega}$  и ускорение  $\vec{\varepsilon}$  направлены вдоль оси  $z$ . В решении задач удобно использовать скалярные величины — проекции этих векторов на ось  $z$ :  $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$ .

Скорость произвольной точки  $B$  тела при плоском движении вычисляют через известную скорость какой-либо точки  $A$  того же тела, принимаемой за полюс (рис. 97):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}. \quad (6.1)$$

где  $\vec{\omega}$  — вектор угловой скорости тела. Ускорения точек тела при плоском движении связаны формулой Ривальса

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \quad (6.2)$$

Вычисление скоростей точек при плоском движении составляет содержание всех задач по кинематике в этом сборнике и является существенной частью решения задач динамики. Разберем способы использования формулы (6.1) — аналитические (метод графов, уравнения трех угловых скоростей, координатный) и геометрические (метод мгновенных скоростей, план скоростей).

**1. Метод кинематических графов.** Для расчета скоростей точек многосвязного механизма, каждое звено которого совершает плоское движение, формулу (6.1) применяют последовательно для всех точек,

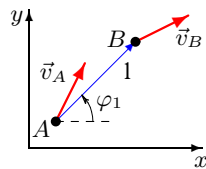


Рис. 97

переходя от одной точки, принимаемой за полюс, к другой. Схему вычислений в этом случае удобно записывать в виде структурных формул (графов [20]):

$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B, \quad (6.3)$$

где над стрелкой указан номер тела или наименование стержня, которому принадлежат точки, а снизу — угол  $\varphi$  между осью  $x$  и вектором  $\overline{AB}$ , отсчитываемый от положительного направления оси  $x$  *против* часовой стрелки. В проекциях на оси  $x, y$  граф (6.3), согласно (6.1), дает уравнения

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - AB \omega_{1z} \sin \varphi_1, \\ v_{By} &= v_{Ay} + AB \omega_{1z} \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $\omega_{1z}$  — проекция угловой скорости тела 1 на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости движения. Если вращение происходит против часовой стрелки, то  $\omega_{1z} = |\omega_1|$ , а если — по часовой стрелке, то  $\omega_{1z} = -|\omega_1|$ .

В качестве вершин графа удобно брать точки механизма с заданными или искомыми скоростями. При этом скорость может быть задана частично, например, только по направлению. Если в задаче имеется тело (обычно диск или цилиндр), катящееся без проскальзывания по какой-либо поверхности, то точка касания тела может быть вершиной графа, так как скорость ее равна нулю.

Для многосвязного механизма (рис. 98) из графов вида (6.3) можно образовать цепочку

$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B \xrightarrow[\varphi_2]{2} C \xrightarrow[\varphi_3]{3} D,$$

особенно удобную для связи скоростей  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_D$ , в тех случаях, когда скорости промежуточных точек  $B$  и  $C$  в задачу не входят.

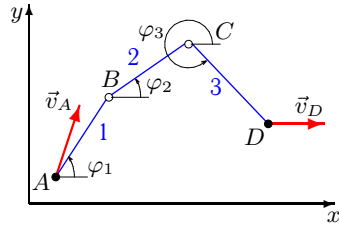


Рис. 98

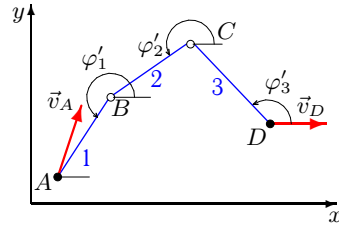


Рис. 99

В проекциях на оси этот граф дает следующие соотношения для компонент скоростей:

$$v_{Dx} = v_{Ax} - l_1 \omega_{1z} \sin \varphi_1 - l_2 \omega_{2z} \sin \varphi_2 - l_3 \omega_{3z} \sin \varphi_3,$$

$$v_{Dy} = v_{Ay} + l_1 \omega_{1z} \cos \varphi_1 + l_2 \omega_{2z} \cos \varphi_2 + l_3 \omega_{3z} \cos \varphi_3,$$

где обозначены длины стержней  $l_1 = AB$ ,  $l_2 = BC$ ,  $l_3 = CD$ .

Многозвенный механизм можно пройти и в обратном направлении (рис. 99). Углы к направлениям стержней будут как и ранее отсчитываться от положительного направления оси  $x$  в начале стержня:

$$D \xrightarrow[\varphi'_3]{3} C \xrightarrow[\varphi'_2]{2} B \xrightarrow[\varphi'_1]{1} A,$$

где  $\varphi'_k = \varphi_k + \pi$ . Соотношение между скоростями точек при этом не изменится.

**2. Уравнение трех угловых скоростей.** Одним из самых распространенных элементов стержневых механизмов является четырехзвенник, состоящий из трех шарнирно соединенных стержней на двух неподвижных опорах. Четвертым элементом механизма является основание, на котором он закреплен (рис. 100). Механизм приводится в движение вращением одного из звеньев. Найдем связь угловых скоростей звеньев. Составляем кинематический граф

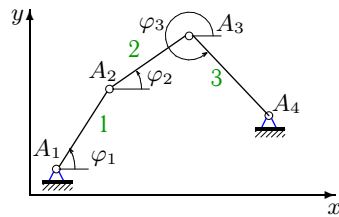


Рис. 100

$$A_1 \xrightarrow[\varphi_1]{1} A_2 \xrightarrow[\varphi_2]{2} A_3 \xrightarrow[\varphi_3]{3} A_4.$$

Записываем уравнения графа, обозначая как и ранее за  $l_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$  длины стержней:

$$v_{A_4x} = v_{A_1x} - l_1 \omega_{1z} \sin \varphi_1 - l_2 \omega_{2z} \sin \varphi_2 - l_3 \omega_{3z} \sin \varphi_3,$$

$$v_{A_4y} = v_{A_1y} + l_1 \omega_{1z} \cos \varphi_1 + l_2 \omega_{2z} \cos \varphi_2 + l_3 \omega_{3z} \cos \varphi_3.$$

Координатная форма записи этих уравнений дает уравнения трех угловых скоростей

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \omega_{m_{iz}}(x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \omega_{m_{iz}}(y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) &= 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $\omega_{m_{iz}}$  — угловая скорость  $m_i$ -го звена,  $x_{n_i}, y_{n_i}, x_{n_{i+1}}, y_{n_{i+1}}$  — координаты его концов.

Если угловая скорость одного из звеньев задана, то угловые скорости двух других легко найти из полученной системы уравнений. В некоторых задачах [12] заданы все три угловые скорости, а определяется конфигурация механизма — положение звеньев, соответствующее этим угловым скоростям. В таких задачах метод МЦС не применим, метод графов в тригонометрической форме неэффективен, а уравнения трех угловых скоростей позволяют просто решить задачу [12].

Интересен один простой и наглядный частный случай.

Пусть  $y_1 = y_4, y_2 = y_3$ . Это означает, что четырехзвенник принимает форму трапеции (рис. 101). Из второго уравнения (6.5) имеем теорему трапеции, утверждающую, что *угловые скорости боковых звеньев четырехзвенника, имеющего в данный момент форму трапеции, равны:  $\omega_{1z} = \omega_{3z}$ .*

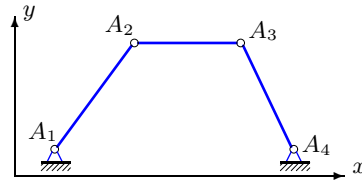


Рис. 101

Уравнения трех угловых ускорений четырехзвенника следуют непосредственно из формулы Ривальса (6.2) и имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{m_{iz}}(x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) - \sum_{i=1}^3 \omega_{m_{iz}}^2(y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{m_{iz}}(y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) + \sum_{i=1}^3 \omega_{m_{iz}}^2(x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) &= 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $\varepsilon_{m_{iz}}$  — угловое ускорение  $m_i$ -го звена. Если угловые скорости известны, то система уравнений (6.6) позволяет найти угловые ускорения двух звеньев по ускорению третьего, которое часто просто равно нулю, если ведущее звено вращается равномерно. При решении имеет смысл воспользоваться совпадением определителей систем (6.5) и (6.6).

Очевидно простое обобщение уравнений трех угловых скоростей и уравнений трех угловых ускорений на большее число звеньев. Для этого достаточно изменить верхний предел суммирования в (6.5) и (6.6) с 3 на число звеньев.

**3. Метод мгновенных центров скоростей (МЦС).** Легко показать, что в каждый момент при плоском движении тела, если его угловая скорость отлична от нуля, существует точка тела, скорость которой равна нулю и эта точка единственная. Точка МЦС в общем случае может и не принадлежать телу и, находясь за его пределами, быть геометрически связанной с ним. Доказано, что МЦС тела лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к скоростям точек, принадлежащих ему (рис. 102). У тех звеньев, у которых МЦС не существует (скорости двух точек параллельны и не перпендикулярны отрезку, их соединяющему), угловая скорость равна нулю, а скорости всех точек равны. Если векторы скоростей перпендикулярны отрезку их соединяющему, то имеют место два частных случая положения МЦС (рис. 103, 104).

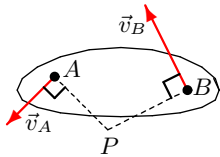


Рис. 102

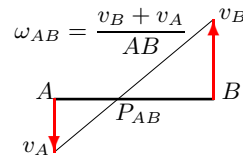


Рис. 103

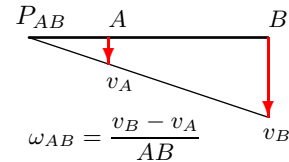


Рис. 104

Если тело (колесо, диск, цилиндр) катится по поверхности без проскальзывания, то МЦС этого тела находится в точке касания.

Рассчитывая скорости точек тела, определяем расстояния от точек до МЦС этого тела. Записываем систему уравнений для скоростей  $N$  точек тела  $i$ :  $v_k = \omega_i R_{ik}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Здесь  $\omega_i$  — угловая скорость тела  $i$ ,  $R_{ik}$  — расстояние от МЦС тела  $i$  до точки  $k$ . Решаем систему, в которой, как правило одна из скоростей известна, определяем угловую скорость тела, а затем скорости всех его точек. При расчете многозвенного механизма шарнирные точки сочленения принадлежат одновременно двум (и более) звеньям. Это позволяет последовательно рассчитывать скорости точек механизма, передавая информацию о скоростях от одного звена к другому.

Недостатком метода МЦС является то, что здесь определяются только модули скоростей и угловых скоростей, а в некоторых задачах, например при составлении уравнения Лагранжа 2-го рода, с. ??, требуются проекции этих величин, вычисленные с учетом их знака. Кроме того, есть задачи, где метод МЦС неприменим (с. 177, 183).

Для определения величин и направлений скоростей можно также пользоваться простым свойством векторов скоростей твердого тела: проекции скоростей неизменяемого отрезка на ось отрезка равны:  $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$ , (рис. 105).

Кроме того вычислять проекции скоростей удобно с помощью координатного метода. Рассмотрим в некоторой системе координат кривошипно-шатунный механизм (рис. 106). Кривошип

$AB$ , вращаясь вокруг оси в подшипнике  $A$ , посредством шатуна  $BC$  сообщает возвратно-поступательное движение ползуну  $C$ . Дано:  $AB = BC = l$ . Силы, действующие на механизм, не указаны, для кинематического анализа они не требуются.

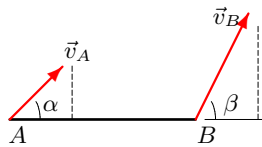


Рис. 105

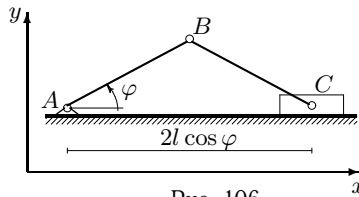


Рис. 106

Пусть  $\varphi$  — угол поворота кривошипа. Найдем скорость ползуна. Для этого определим его координату:  $x_C = x_A + 2l \cos \varphi$ . Дифференцируя это равенство, получаем

$$v_{xC} = -2l\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (6.7)$$

Легко проверить, что этот же результат получается методом графов. Строим граф  $A \xrightarrow{l} B \xrightarrow{-l} C$ . Записываем оба уравнения графа в проекции на оси  $x$  и  $y$ . Вычисляем из второго уравнения графа (в проекции на  $y$ ) скорость  $v_{Cy} = v_{Ay} + l\dot{\varphi} \cos \varphi + l\omega_{BCz} \cos(-\varphi)$ . При  $v_{Cy} = v_{Ay} = 0$  получаем отсюда угловую скорость  $\omega_{BCz} = -\dot{\varphi}$ . Подставляем ее в первое уравнение графа,  $v_{Cx} = v_{Ax} - l\dot{\varphi} \sin \varphi - l\omega_{BCz} \sin(-\varphi)$ , и получаем тот же результат (6.7), но более сложным способом.

Сравнивая методы, заметим, что аналитический метод, как универсальный, имеющий простую формализацию в виде графов и дающий результат в проекциях, безусловно наиболее предпочтителен при решении задач теоретической механики. Однако, в некоторых очевидных случаях метод кинематических графов применять нецелесообразно. Например, при определении скорости точки  $A$  цилиндра, катящегося по неподвижной поверхности, по заданной скорости центра  $O$  (рис. 107) проще использовать понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка  $P$  касания плоскости неподвижна. Следовательно, учитывая линейное распределение скоростей, получаем  $v_{Ax} = 2v_{Ox}$ .

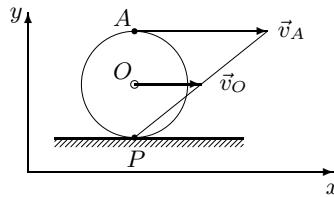


Рис. 107

Сравнивая методы, заметим, что аналитический метод, как универсальный, имеющий простую формализацию в виде гра-

фов и дающий результат в проекциях, безусловно наиболее предпочтителен при решении задач теоретической механики.

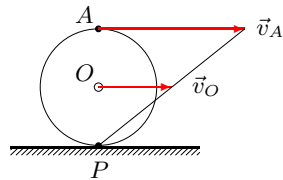


Рис. 108

Однако в некоторых очевидных случаях метод кинематических графов применять нецелесообразно. Например, при определении скорости точки  $A$  цилиндра, катящегося по неподвижной поверхности, по заданной скорости центра  $O$  (рис. 108) проще использовать понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка  $P$  касания плоскости неподвижна. Следовательно, учитывая линейное распределение скоростей, получаем  $v_{Ox} = v_{Ax}/2$ .

**4. План скоростей.** Построение плана скоростей механизма возможно, если дана скорость хотя бы одной его точки по величине и направлению. Эту скорость надо отложить в выбранном масштабе от некоторой точки, которую будем считать полюсом плана ассоциировать со всеми неподвижными точками механизма. Далее, замечаем, что в векторном уравнении (6.1), которое можно представить неким треугольником, со сторонами в виде векторов  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_{BA}$ , сторона  $\vec{v}_{BA}$  перпендикулярна стержню  $AB$  (рис. 109). Направление же этого стержня известно. Следовательно, если вершины векторного треугольника на плане скоростей обозначить строчными буквами  $a$  (конец вектора  $\vec{v}_A$ ),  $b$  (конец вектора  $\vec{v}_B$ ) и  $o$  — полюс, то из замеченного условия  $ab \perp AB$  можно найти положение точки  $b$  и, следовательно, определить скорость  $\vec{v}_B$ .

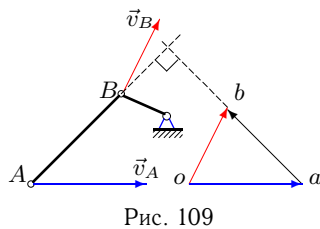


Рис. 109

Модуль угловой скорости определяем из соотношения  $\omega_{AB} = ab/AB$ . Аналогичные построения повторяем и для других точек. Примеры построения планов скоростей даны на с. 165, 185, 210, 215.

## К6. Скорости точек простого механизма (3 звена).

### Условия задач

В указанном положении механизма задана угловая скорость одного из его звеньев ( $\text{с}^{-1}$ ). Звенья, направления которых не указано, принимать вертикальными или горизонтальными. Радиус цилиндра  $R$ . Размеры даны в метрах. Найти угловые скорости звеньев и скорости точек  $A$  и  $C$ .