

**Пример решения**

**Задача.** Механизм состоит из цилиндра, катающегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности, уголка  $ABC$  и кривошипа  $OA$  (рис. 110). В указанном положении механизма задана угловая скорость кривошипа  $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$ . Сторона  $CB$  уголка  $ABC$  в данный момент горизонтальная,  $AB$  — вертикальная. Радиус цилиндра  $R = 2 \text{ м}$ . Даны размеры:  $BC = 4 \text{ м}$ ,  $AB = 1 \text{ м}$ ,  $OA = 5 \text{ м}$  и угол  $\cos \alpha = 4/5$ . Найти угловые скорости звеньев и скорости точек  $A$  и  $C$ .

**Решение**

Задачу решаем тремя методами.

1. *Метод мгновенных центров скоростей.* Сначала нумеруем тела, входящие в механизм. Цилиндр — №1, уголок  $ABC$  — №2, стержень  $OA$  (кривошип) — №3. Находим значение скорости точки  $A$ , лежащей на стержне, совершающем вращательное движение вокруг шарнира  $O$ . По формуле Эйлера (5.1) в ее скалярной форме имеем

$$v_A = \omega_3 OA = 2 \cdot 5 = 10 \text{ м/с.} \quad (6.8)$$

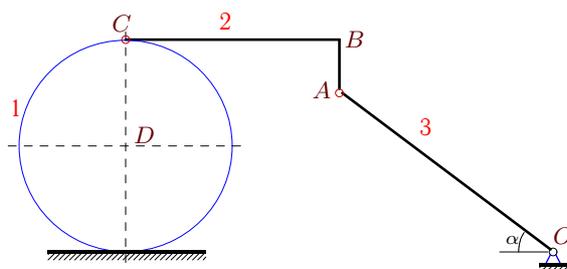


Рис. 110

Вектор  $\vec{v}_A$  откладываем от точки  $A$  перпендикулярно  $OA$  по направлению вращения. По условию  $\omega_{3z} = 2 \text{ с}^{-1} > 0$ , следовательно, вращение происходит против часовой стрелки (рис. 111).

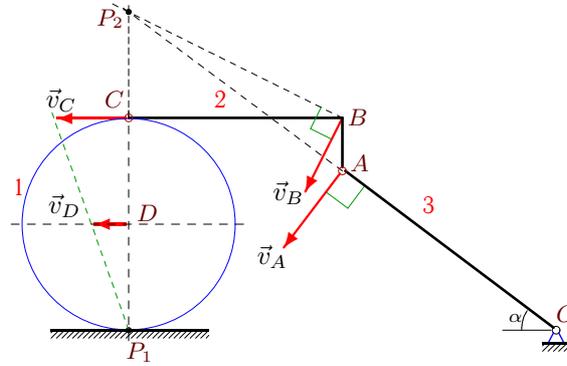


Рис. 111

Скорость точки  $C$  сразу найти нельзя — угловая скорость цилиндра неизвестна. Но известно направление вектора скорости  $\vec{v}_C$ . Этот вектор перпендикулярен радиусу, проведенному к МЦС цилиндра. Качение происходит без проскальзывания, следовательно, мгновенный центр скоростей лежит в точке касания  $P_1$ . Итак, известны направления векторов скоростей двух точек уголка  $ABC$ . Восстанавливаем перпендикуляры к направлениям векторов  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_C$  и на их пересечении находим МЦС тела  $ABC$ . Вычисляем расстояния от точек  $A, B, C$  до центра  $P_2$ :

$$\begin{aligned} AP_2 &= BC / \cos \alpha = 4 \cdot 5 / 4 = 5 \text{ м}, \\ CP_2 &= AP_2 \sin \alpha - AB = 5 \cdot 3 / 5 - 1 = 2 \text{ м}, \\ BP_2 &= \sqrt{BC^2 + CP_2^2} = 2\sqrt{5} \text{ м}. \end{aligned}$$

Для скоростей точек, совершающих мгновенное вращательное движение вокруг полюса  $P_2$ , справедливы формулы

$$\begin{aligned} v_A &= AP_2 \omega_2, \\ v_B &= BP_2 \omega_2, \\ v_C &= CP_2 \omega_2. \end{aligned}$$

Так как значение  $v_A$  уже известно, находим из первого уравнения угловую скорость  $\omega_2 = v_A / AP_2 = 10 / 5 = 2 \text{ с}^{-1}$ . Из второго и третьего уравнения вычисляем скорости

$$\begin{aligned} v_B &= BP_2 \omega_2 = 2\sqrt{5} \cdot 2 = 4\sqrt{5} \text{ м/с}, \\ v_C &= CP_2 \omega_2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Теперь уже по известной скорости точки  $C$  можно найти угловую скорость цилиндра:  $\omega_1 = v_C / (2R) = 4 / 4 = 1 \text{ с}^{-1}$ .

2. *План скоростей.* Вычисляем значение скорости точки  $A$  (6.8). Выбираем на плоскости произвольную точку, от которой будем откладывать скорости механизма. В этой же точки будут находиться образы неподвижных точек механизма, в данном примере это неподвижный шарнир  $O$  и точка касания цилиндра и плоскости  $P_1$ . Заметим, что при построении плана скоростей информация о МЦС звеньев не используется. Построение начинаем с вектора  $\vec{v}_A$ , направление и величина которого известны (рис. 112).

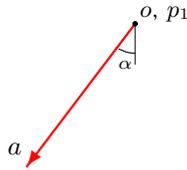


Рис. 112

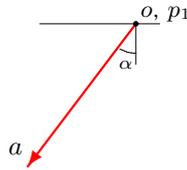


Рис. 113

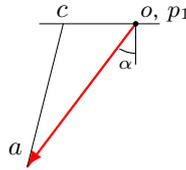


Рис. 114

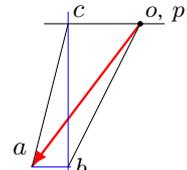


Рис. 115

Для того, чтобы найти на плане положение точки  $c$ , воспользуемся правилом построения плана скоростей, согласно которому  $CP_1 \perp cp_1$ . Диаметр цилиндра  $CP_1$  вертикальный, следовательно, вектор скорости точки  $C$  горизонтален. Проводим через начало плана скоростей (точка  $p_1$ ) горизонтальную прямую, на которой будем искать точку  $c$  (рис. 113). Еще раз воспользуемся правилом плана скоростей:  $ac \perp AC$ . Тангенс угла наклона отрезка  $AC$  известен и равен  $1/4$ . Под таким же углом, но к вертикали, проводим на плане скоростей через точку  $a$  прямую до пересечения с проведенной уже горизонтальной прямой. На пересечении прямых отмечаем точку  $c$  (рис. 114). Значение скорости точки  $C$  найдено. Это величина отрезка  $oc$  на плане скоростей. Легко вычислить значение скорости:  $oc = oa \sin \alpha - oa \cos \alpha / 4 = 6 - 8/4 = 4$  м/с.

Для определения скорости точки  $B$ <sup>1</sup>, лежащей на стороне  $CB$  и на стороне  $AB$  уголка, проведем через точку  $c$  на плане скоростей перпендикуляр к  $CB$ , а через  $a$  — перпендикуляр к  $AB$ . Точка их пересечения дает скорость  $v_B$  (рис. 115). Модуль скорости точки  $B$  равен длине отрезка  $ob = \sqrt{oc^2 + cb^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$  м/с. Модули угловых скоростей вычисляются по простым формулам

$$\omega_2 = ab/AB = 2/1 = 2 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_1 = cp_2/CP_2 = 4/4 = 1 \text{ с}^{-1}.$$

<sup>1</sup>Заметим, что в условии заданий определение скорости  $B$  не входит. Значение скорости точки  $B$  не во всех вариантах получается целым.

3. Уравнение трех угловых скоростей. Для решения потребуются мгновенные координаты шарниров механизма. Введем систему координат, выбрав за начало произвольную точку (рис. 116).

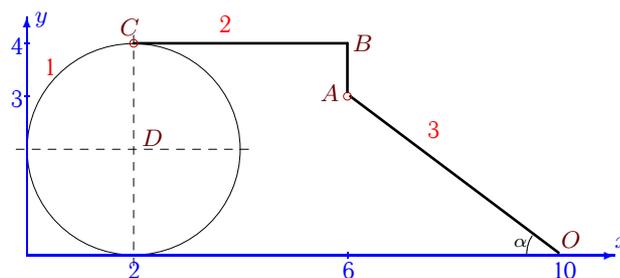


Рис. 116

Записываем уравнения трех угловых скоростей (6.5)

$$\begin{aligned}\omega_{1z}(x_C - x_{P_1}) + \omega_{2z}(x_A - x_C) + \omega_{3z}(x_O - x_A) &= 0, \\ \omega_{1z}(y_C - y_{P_1}) + \omega_{2z}(y_A - y_C) + \omega_{3z}(y_O - y_A) &= 0,\end{aligned}$$

подставляем координаты шарниров и значение  $\omega_{3z} = 2 \text{ с}^{-1}$ :

$$\begin{aligned}4\omega_{2z} + 8 &= 0, \\ 4\omega_{1z} - \omega_{2z} - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Решаем систему уравнений:  $\omega_{2z} = -2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_{1z} = 1 \text{ с}^{-1}$ .

Заметим, что этот способ позволяет найти не просто модули угловых скоростей, а их проекции на ось  $z$ . Положительные значения проекций соответствуют вращению тела против часовой стрелки, отрицательные — по направлению вращения. В задачах аналитической механики нужны именно эти величины.

## К7. Кинематический анализ механизма (5 звеньев)

### Условия задач

В указанном положении механизма задана угловая скорость ( $\text{с}^{-1}$ ) одного из его звеньев. Длины звеньев даны в сантиметрах. Стержни, направления которых не указано, считать вертикальными или горизонтальными. Найти угловые скорости звеньев механизма.