Задача 110. Ракета, число Циолковского [1] для которой равно 1, имеет максимальную скорость 2000 м/с. Какую максимальную скорость будет иметь эта ракета, если залить в нее в два раза больше топлива?

Решение

Максимальная скорость, которую может развить ракета, вычисляется по формуле Циолковского [2]

$$v = u \ln(1 + c), \tag{3.16}$$

где $c = m_f/m_b$ — отношение массы топлива m_f к массе корпуса ракеты m_b (число Циолковского). При выводе этой формулы не учитывались силы, действующие на ракету (например, сила тяжести и сопротивление воздуха), предполагалось, что при достижении максимальной скорости ракеты топливо выгорает полностью, а скорость u истечения сгораемых газов постоянна. Из (3.16) найдем эту скорость

$$u = v/\ln(1 + c) = 2000/\ln(2) = 2885.39 \text{ м/с}.$$

Если топлива в ракете будет вдвое больше (при той же массе корпуса), то число Циолковского будет также вдвое больше. Отсюда находим максимальную скорость ракеты в этом случае

$$v = u \ln(1 + 2\,c) = 2885.39 \cdot \ln(3) = 3169.92 \text{ м/с}.$$

Заметим, что это существенно меньше, чем первая космическая скорость 7.9 км/с. К. Э. Циолковский первый показал, что одноступенчатая ракета наращиванием массы топлива (числитель числа Циолковского) не может достичь этой скорости, и, следовательно, невозможен выход в космос. Уменьшение знаменателя в выражении $c = m_f/m_b$ за счет отбрасывания отработавших ступеней дает возможность увеличить скорость ракеты до нужных значений.

3.2. Динамика твердого тела и системы

Теорема о движении центра масс системы имеет следующую математическую формулировку

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e, \tag{3.17}$$

[1] *Циолковский К. Э.* (1857–1935) — русский ученый, основоположник теоретической космонавтики.

[2] Получена интегрированием уравнения движения точки переменной массы (уравнение Мещерского И. В.) $ma = F - u\dfrac{dm}{dt}$, где m — переменная масса точки, u — относительная скорость отбрасываемых частиц.

где $m = \sum m_k$ — масса всей системы, $\vec{a}_c$ — ускорение центра масс, $\vec{F}_k^e$ — внешние силы, действующие на систему. Заметим, что внутренние силы $\vec{F}_k^i$ на движение центра масс системы непосредственно не влияют. Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_c = \sum m_k \vec{r}_k / m. \tag{3.18}$$

Теорема об изменении момента количества движения:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(F_j^e), \tag{3.19}$$

где $\vec{K}_O$ — момент количества движения системы [1] относительно точки O, $\sum \vec{M}_O(F_j^e)$ — сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно той же точки.

Теорема об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k^i + \sum A_k^e, \tag{3.20}$$

где T — кинетическая энергия системы, $\sum A_k^i$ — сумма работ всех внутренних сил на перемещении системы из положения 1 в положение 2, $\sum A_k^e$— сумма работ всех внешних сил на том же перемещении. Для неизменяемых систем и для твердого тела $\sum A_k^i = 0$.

Кинетическая энергия тела при поступательном движении вычисляется по формуле

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

где m — масса тела, v — скорость какой-либо точки тела [2].

Кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг оси z с угловой скоростью ω вычисляется по формуле

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z — момент инерции тела вокруг оси z.

При плоском движении тела (в плоскости xy)

$$T = \frac{mv_{\mathrm{C}}^2}{2} + \frac{J_{zc}\omega^2}{2},$$

где v_{C} — скорость центра масс, J_{zc} — момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс тела.

[1] $\vec{K}_O = \sum \vec{k}_{jO}$, где $\vec{k}_{jO}$ — момент количества движения точки j относительно того же центра, с. 147.

[2] При поступательном движении скорости всех точек равны.

Легко показать, что кинетическая энергия однородного цилиндра массой m, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности имеет вид

$$T = \frac{3mv_C^2}{4}, \tag{3.21}$$

где v_C — скорость оси цилиндра.

Кинетическая энергия тела в произвольном движении [1] имеет вид

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{\vec{\omega} \cdot J_C \,\vec{\omega}}{2}, \tag{3.22}$$

где v_C — скорость центра масс тела, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, J_C — тензор момента инерции тела относительно его главных центральных осей, введенный симметричной матрицей

$$J_C = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

где J_x, J_y, J_z — осевые моменты инерции, а $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{zy} = J_{yz}$ — центробежные.

Задача 111. Механизм, состоящий из трех тел, установлен на призме 4, скользящей по гладкой плоскости (рис. 240). Нить, соединяющая обод однородного цилиндра 3 с внешним радиусом составного блока 2, ось которого закреплена на призме, горизонтальна. Внутренние радиусы блоков 1 и 2 соединены нитью, параллельной плоскости призмы, по которой скатывается блок 1. Под действием

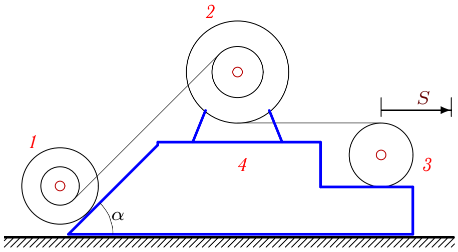

Рис. 240

внутренних сил из состояния покоя механизм пришел в движение. Ось цилиндра 3 сместилась относительно призмы на расстояние $S = 94$ см. Даны радиусы и массы $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см, $R_2 = 4$ см, $r_2 = 3$ см, $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 20$ кг, $m_4 = 12$ кг, $\cos\alpha = 0.6$. Найти смещение призмы.

[1] См. также (3.59), с. 181.

Суммируя моменты инерции тела и трех точек, получаем тензор инерции

$$J_O = J^{(p)} + J^{(m)} = \begin{bmatrix} 180 & -72 & -114 \\ -72 & 315 & -56 \\ -114 & -56 & 279 \end{bmatrix}.$$

Вычислим вектор кинетического момента

$$\vec{K}_O = J_O\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 180 & -72 & -114 \\ -72 & 315 & -56 \\ -114 & -56 & 279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -360 \\ -2220 \\ 3116 \end{bmatrix}. \qquad (3.58)$$

Кинетическую энергию вычисляем как скалярное произведение векторов (3.55) и (3.58):

$$T = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{K}_O}{2} = \frac{-360\cdot 4 + 2220\cdot 4 + 3116\cdot 12}{2} = 22416 \text{ Нм}.$$

Заметим, что для вычисления кинетической энергии можно раскрыть произведения в (3.54) и получить формулу

$$T = \frac{J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2}{2} - J_{xy}\omega_x\omega_y - J_{xz}\omega_x\omega_z - J_{yz}\omega_y\omega_z. \qquad (3.59)$$

Задача 134. Однородная прямоугольная пластинка массой $m = 6$ кг закреплена шарнирно на трех стержнях параллельно плоскости xy (рис. 266). Задана скорость вершины D: $v_{Dx} = v_{Dy} = 0$, $v_{Dz} = 8$ м/с

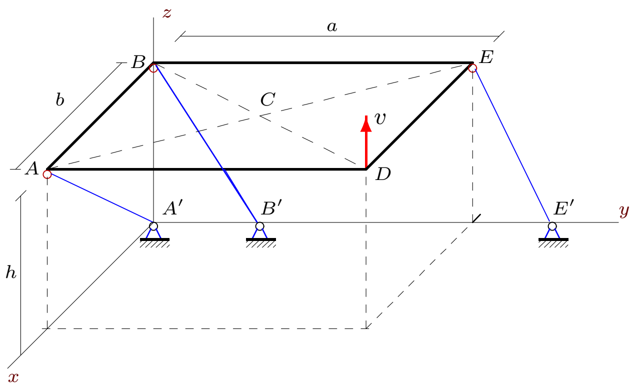

Рис. 266

и размеры $a = 5$ м, $b = c = 2$ м, $A'B' = 2$ м, $B'E' = 4$ м. Найти кинетическую энергию пластинки.

Решение

Для вычисления кинетической энергии воспользуемся формулой (3.22). Сначала решим задачу кинематики. Найдем угловую скорость пластины и скорость ее центра масс. Запишем три векторные уравнения, связывающие скорости точек пластины. Точку D с известной скоростью примем за полюс

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DA},\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DB},\\ \vec{v}_E &= \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DE}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Векторы скоростей концов стержней, шарнирно закрепленных на неподвижном основании, перпендикулярны стержням. Выразим это в виде равенства нулю следующих скалярных произведений

$$\begin{aligned}\vec{v}_A \cdot \overrightarrow{A'A} &= 0,\\ \vec{v}_B \cdot \overrightarrow{B'B} &= 0,\\ \vec{v}_E \cdot \overrightarrow{E'E} &= 0.\end{aligned} \tag{3.61}$$

Радиусы-векторы, входящие в эти уравнения, имеют вид

$$\overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix} 0\\ -5\\ 0\end{bmatrix}, \ \overrightarrow{DB} = \begin{bmatrix} -2\\ -5\\ 0\end{bmatrix}, \ \overrightarrow{DE} = \begin{bmatrix} -2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{A'A} = \begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 2\end{bmatrix}, \ \overrightarrow{B'B} = \begin{bmatrix} 0\\ -2\\ 2\end{bmatrix}, \ \overrightarrow{E'E} = \begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 2\end{bmatrix}.$$

Таким образом, имеем систему трех векторных уравнений (3.60) и трех скалярных (3.61), т. е. всего 12 уравнений для четырех векторных неизвестных $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_E$, $\vec{\omega}$. Перепишем эту систему в скалярной форме с учетом данных задачи. Большинство уравнений простые, а некоторые сразу дают ответы:

$$\begin{aligned}&-v_{Ax} + 5\,\omega_z = 0, && v_{Ay} = 0, && -v_{Az} + 8 - 5\,\omega_x = 0,\\ &-v_{Bx} + 5\,\omega_z = 0, && -v_{By} - 2\,\omega_z = 0, && -v_{Bz} + 8 - 5\,\omega_x + 2\,\omega_y = 0,\\ &v_{Ex} = 0, && -v_{Ey} - 2\,\omega_z = 0, && -v_{Ez} + 8 + 2\,\omega_y = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\,v_{Ax} + 2\,v_{Az} = 0,\\ &-2\,v_{By} + 2\,v_{Bz} = 0,\\ &-\,v_{Ey} + 2\,v_{Ez} = 0.\end{aligned}$$

Получим решение системы уравнений (скорости в м/с, угловые скорости — в c^{-1}):

$$\begin{aligned}
&\omega_x = -0.4,\ \omega_y = -3,\ \omega_z = -2,\\
&v_{Ax} = -10,\ v_{Ay} = 0,\ v_{Az} = 10,\\
&v_{Bx} = -10,\ v_{By} = 4,\ v_{Bz} = 4,\\
&v_{Ex} = 0,\ v_{Ey} = 4,\ v_{Ez} = 2.
\end{aligned}$$

Скорость центра масс пластинки, совпадающего с ее геометрическим центром C, найдем по формуле Эйлера через скорость полюса D с использованием найденной угловой скорости пластинки

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{\omega}\times\overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix} + \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -0.4 & -3 & -2\\ -1 & -2.5 & 0\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\2\\6\end{bmatrix}.$$

Для проверки вычислим эту скорость, пользуясь линейным характером распределения скоростей в твердом теле. Скорость точки C найдем как полусумму скоростей A и E или B и D (в м/с):

$$\begin{aligned}
v_{Cx} &= (v_{Ax}+v_{Ex})/2 = -5,\\
v_{Cy} &= (v_{Ay}+v_{Ey})/2 = 2,\\
v_{Cz} &= (v_{Az}+v_{Ez})/2 = 6.
\end{aligned}\tag{3.62}$$

Момент инерции параллелепипеда [1] (рис. 267) в осях x, y, z с размерами соответственно l_x, l_y, l_z относительно оси x, проходящей через его центр масс, имеет вид

$$J_x = m\,(l_y^2 + l_z^2)/12.$$

Моменты относительно других осей получаются круговой перестановкой индексов

$$J_y = m(l_x^2+l_z^2)/12,\ J_z = m(l_x^2+l_y^2)/12.$$

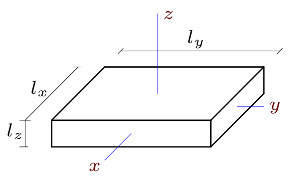

Рис. 267

[1] См. также (3.56), с. 179 и таблицу 1, с. 206.

В частном случае тонкой пластинки ($l_z = 0$) имеем следующую матрицу тензора инерции

$$J_C = \begin{pmatrix} \dfrac{ml_y^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ml_x^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m(l_x^2 + l_y^2)}{12} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом примере при $l_x = 2$ см, $l_y = 5$ см, $l_z = 0$ получим матрицу тензора инерции (в кгм^2)

$$J_C = \begin{pmatrix} 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14.5 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь значением скорости $\vec{v}_C$ (3.62), вычисляем первое слагаемое в (3.22)

$$\frac{m\,v_C^2}{2} = \frac{6\,(25 + 4 + 36)}{2} = 195 \text{ Нм}.$$

Во втором слагаемом сначала вычисляем произведение

$$J_C\,\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14.5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ -29 \end{bmatrix},$$

затем скалярное произведение

$$\vec{\omega} \cdot J_C\vec{\omega} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ -29 \end{bmatrix} = 78 \text{ Нм}.$$

Окончательно получаем кинетическую энергию пластины

$$T = 195 + 78/2 = 234 \text{ Нм}.$$

Задача 135. Гироскоп, закрепленный в сферическом шарнире O, вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω_1 и за счет