Пример решения

Задача. Движение прямоугольного параллелепипеда массой $m_0 = 6$ кг вокруг точки, закрепленной в начале координат, задано углами Эйлера $\varphi = t$, $\psi = -3t$, $\theta = -8\sqrt{2}\,t + \pi/4$ (рис. **??**). В вершинах параллелепипеда закреплены три точки с массами $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 1$ кг (рис. 156). Оси подвижной системы координат x, y, z, связанной с телом, параллельны ребрам параллелепипеда. Дано $BD = AO = OC = 2$ м, $AB = 6$ м. Найти кинетическую энергию системы при $t = 0$.

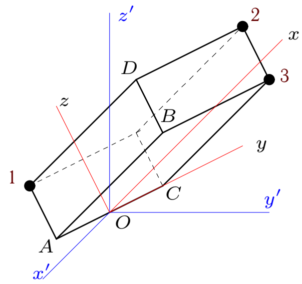

Рис. 156

Решение

Кинетическая энергия сферического движения тела имеет вид

$$T = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}_0}{2} = \frac{\vec{\omega} \cdot J\vec{\omega}}{2}, \qquad (11.9)$$

где $\vec{L}_0$ — вектор кинетического момента тела в подвижных осях, связанных с телом, относительно точки закрепления в начале координат O, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости (11.5), а тензор инерции J введен матрицей (11.4). Раскрывая произведения в (11.9), получим

$$T = \frac{J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2}{2} - J_{xy}\omega_x\omega_y - J_{xz}\omega_x\omega_z - J_{yz}\omega_y\omega_z, \qquad (11.10)$$

Для определения проекций угловой скорости на подвижные оси координат воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера (7.1), с. 227. Для заданного закона вращения получим

$$\begin{aligned}
\omega_x &= -3\sin(\theta)\sin(t) - 8\sqrt{2}\cos(t),\\
\omega_y &= -3\sin(\theta)\cos(t) + 8\sqrt{2}\sin(t),\\
\omega_z &= 1 - 3\cos(\theta), \quad \theta = \pi/4 - 8\sqrt{2}\,t.
\end{aligned}$$

При $t = 0$ найдем

$$\omega_x = -8\sqrt{2},\ \omega_y = -3\sqrt{2}/2,\ \omega_z = 1 - 3\sqrt{2}/2. \qquad (11.11)$$

Тензор моментов инерции системы складывается из моментов инерции параллелепипеда и моментов инерции трех точек. Введем обозначения $AC = a = 4$ м, $BD = b = 2$ м, $AB = c = 6$ м. Имеем следующие выражения для моментов инерции параллелепипеда относительно его главных центральных осей x_c, y_c, z_c (рис. 157)

$$
\begin{aligned}
J_{xc}^{(0)} &= m_0(a^2+b^2)/12 = 10 \text{ кгм}^2,\\
J_{yc}^{(0)} &= m_0(c^2+b^2)/12 = 20 \text{ кгм}^2,\\
J_{zc}^{(0)} &= m_0(a^2+c^2)/12 = 26 \text{ кгм}^2,\\
J_{xyc}^{(0)} &= J_{xzc}^{(0)} = J_{yzc}^{(0)} = 0.
\end{aligned}
$$

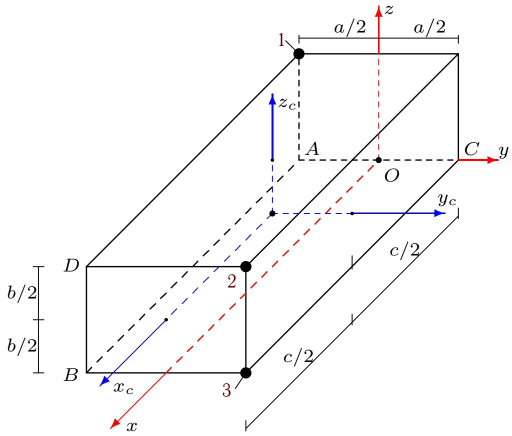

Рис. 157

По теореме Штейнера [1] имеем моменты инерции параллелепипеда относительно осей x, y, z

$$
\begin{aligned}
J_{x}^{(0)} &= m_0(a^2+b^2)/12 + m_0 b^2/4 = 10 + 6 = 16 \text{ кгм}^2,\\
J_{y}^{(0)} &= m_0(c^2+b^2)/12 + m_0(c^2+b^2)/4 = m_0(c^2+b^2)/3 = 80 \text{ кгм}^2,\\
J_{z}^{(0)} &= m_0(a^2+c^2)/12 + m_0 c^2/4 = 26 + 54 = 80 \text{ кгм}^2,\\
J_{xz}^{(0)} &= m_0 bc/4 = 18 \text{ кгм}^2,\\
J_{xy}^{(0)} &= J_{yz}^{(0)} = 0.
\end{aligned}
$$

Моменты инерции точки массой m_k с координатами x_k, y_k, z_k имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
&J_x^{(k)} = m_k(y_k^2+z_k^2),\ \ J_y^{(k)} = m_k(x_k^2+z_k^2),\ \ J_z^{(k)} = m_k(y_k^2+x_k^2),\\
&J_{xy}^{(k)} = m_k x_k y_k,\ \ J_{xz}^{(k)} = m_k x_k z_k,\ \ J_{yz}^{(k)} = m_k z_k y_k.
\end{aligned}
$$

[1] *Jakob Steiner* (1796 – 1863) — швейцарский математик.

Суммируя моменты инерции тела и трех точек, получаем

$$
\begin{aligned}
&J_x = J_x^{(0)} + (m_1+m_2)(a^2/4+b^2) + m_3a^2/4 = 16+52 = 68 \text{ кгм}^2,\\
&J_y = J_y^{(0)} + m_1b^2 + m_2(c^2+b^2) + m_3c^2 = 80+132 = 212 \text{ кгм}^2,\\
&J_z = J_z^{(0)} + m_1a^2/4 + (m_2+m_3)(c^2+a^2/4) = 80+136 = 216 \text{ кгм}^2,\\
&J_{xy} = (m_2+m_3)ac/2 = 36 \text{ кгм}^2,\\
&J_{xz} = J_{xz}^{(0)} + m_2bc = 18+24 = 42 \text{ кгм}^2,\\
&J_{yz} = -m_1ab/2 + m_2ab/2 = -8 \text{ кгм}^2.
\end{aligned}
$$

Кинетическая энергия (11.10) с учетом найденных значений моментов инерции и угловых скоростей (11.11) имеет значение

$$T = 5423 - 324\sqrt{2} - 1836 + 324\sqrt{2} = 3587 \text{ Нм}.$$

Глава 12

Аналитическая механика

Д9. Принцип возможных перемещений

Механизм с идеальными стационарными связями находится в равновесии под действием силы F и моментов M_1, M_2. Длины звеньев и радиус даны в метрах, моменты — в Нм. Стержни, направление которых не указано, считать горизонтальными или вертикальными. Диск касается горизонтальной поверхности без проскальзывания, $\alpha = 45°$. Найти величину F.

Условия задач