

ВОПРОСЫ РАСЧЕТА КОМБИНИРОВАННЫХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

1. Два способа расчета висячих комбинированных систем с учетом геометрической нелинейности

Существует два способа учета изменения геометрической схемы висячей комбинированной конструкции при действии временной нагрузки:

1) уравнение равновесия элемента конструкции записывается в дифференциальной форме; расчет сводится к решению дифференциального уравнения и к использованию дифференциальных зависимостей между расчетными факторами — прогибом, углом поворота сечения, изгибающим моментом в балке, поперечной силой;

2) уравнения равновесия выражаются системой конечно-разностных уравнений, учитывающих нелинейность перемещений и записываемых в матричной форме.

Первый способ, предложенный Ж. Меланом, Ф. Блейхом, С. П. Тимошенко, основан на общих законах строительной механики упругих систем и методе последовательных приближений при решении линейных задач [67, 68, 70].

До последнего времени с помощью этого способа был разработан расчет однопролетных и трехпролетных висячих мостов лишь обычной системы, для раскрытия статической неопределенности которых составлялось уравнение Лагранжа. Сложность этого способа расчета значительно возрастает с увеличением статической неопределенности системы. Поэтому в предлагаемой работе в пределах обычных допущений дается более общий регулярный способ расчета с применением ЭЦВМ.

Отладка программ для расчета по этой методике не представляет затруднений, так как в частном случае без учета прогибов (нелинейности) предложенный способ расчета превращается в обычный расчет по методу сил с определением перемещений по Верещагину. Предлагается также использовать при расчете так называемые условные линии влияния. Условность их состоит в том, что с помощью таких линий влияния допускается отыскивать невыгодное положение грузов, передвигая их в пролете, но сохраняя в некоторых пределах интенсивность нагрузки (величины грузов) так, чтобы значение коэффициента деформативности в процессе расчета не изменялось более чем на 10—15%.

Наглядность расчета по линиям влияния, простота контроля промежуточных результатов, возможность использования для рас-

чета малых вычислительных машин (типа МИР, «Наири») открывают широкие перспективы для внедрения нелинейного расчета в практику проектирования и исследования комбинированных всячич систем повышенной жесткости.

Недостатки способа — некоторая приближенность расчета при конечном числе подвесок по длине пролета (менее 5) и усложнение расчета систем с переменной жесткостью или переменной осевой силой в балке, что естественно и при любом способе расчета требует применения машин с увеличенным объемом оперативной памяти по сравнению с малыми ЭЦВМ.

Второй способ, развитый в отечественной литературе В. А. Смирновым [49], основан на применении численных методов решения уравнений, использовании при расчете машин большой мощности. Искомые результаты с помощью второго способа могут быть получены с любой заданной точностью. Способ особенно эффективен при расчете систем с переменной жесткостью при больших заданных деформациях системы.

В этой книге рассматривается расчет с учетом геометрической нелинейности по первому способу.

2. Дифференциальное уравнение всячич системы с балкой жесткости

В основу расчета комбинированной системы, состоящей из нити и балки, положим следующие предпосылки:

а) несущие элементы системы выполнены из упругого материала. Удлинения вертикальных подвесок и горизонтальные перемещения кабеля при загрузении временной нагрузкой не учитываются как величины второго порядка малости по сравнению с вертикальными перемещениями пролетной конструкции, которые, в свою очередь, малы по сравнению с основными размерами сооружения;

б) сечения балки и других элементов конечной жесткости постоянны на длине рассматриваемого участка пролета;

в) узлы прикрепления подвесок к поясам расположены на параболах, которыми описывается очертание поясов. Число подвесок таково, что их воздействие на балку соответствует равномерно распределенной нагрузке.

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения для однокабельной системы, в которой собственный вес пролетной конструкции передается на основную кабель. Балка жесткости воспринимает усилия лишь от временной нагрузки.

Монтаж кабеля и подвешивание к нему шарнирно сочлененных элементов балки со всей постоянной равномерно распределенной нагрузкой q вызывает распор:

$$H_q = \frac{ql_1^2}{8f}. \quad (2.1)$$

Уравнение равновесия кабеля как пологой нити при равномерном воздействии подвесок может быть выведено дифференцированием основного уравнения гибких нитей:

$$y + \eta = \frac{M_0}{H_q + H_p}; \quad (a)$$

$$-(H_q + H_p) \frac{d^2(y + \eta)}{l_1^2 dx^2} = q + z. \quad (б)$$

Равновесие балки при действии на нее временной нагрузки p и подвесок описывается уравнением

$$EI \frac{d^4 \eta}{l^4 dx^4} = p - z. \quad (в)$$

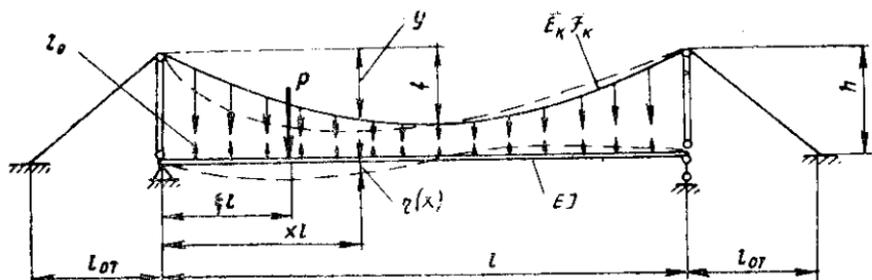


Рис. 7. Расчетная схема для вывода основного уравнения

Складывая соответственно левые и правые части уравнений (б) и (в), получим

$$\frac{EI}{l^4} \frac{d^4 \eta}{dx^4} - (H_q + H_p) \frac{d^2 \eta}{l^2 dx^2} = p + q + (H_q + H_p) \frac{d^2 y}{l^2 dx^2}.$$

Учитывая, что

$$q = \frac{8f}{l^2} H_q; \quad \frac{d^2 y}{l^2 dx^2} = -\frac{8f}{l^2},$$

запишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\eta^{IV} - l^2 \frac{H_q + H_p}{EI} \eta'' = -\frac{pl^4}{EI} (1 - \alpha). \quad (2.2)$$

Здесь l, l_1 — пролеты балки и кабеля;

f, y — стрела и ордината провисания кабеля (рис. 7);

η — дополнительный провес кабеля или прогиб балки;

x — относительная абсцисса сечения ($0 \leq x \leq 1$);

H_q, H_p — распоры в кабеле от постоянной и временной нагрузок;

M_0 — балочный изгибающий момент;

EI — изгибная жесткость балки;

q, p — интенсивность постоянной и временной нагрузок;

z — равномерно распределенное воздействие подвесок на балку.

Коэффициент, стоящий перед вторым членом в левой части уравнения (2.2), обозначим r^2 . В теории расчета висячих мостов r называется коэффициентом деформативности:

$$r = l \sqrt{\frac{H_q + H_p}{EI}}. \quad (2.3)$$

В уравнении (2.2) α — это коэффициент, с помощью которого определяется распор от временной нагрузки:

$$H_p = \alpha_p \frac{l^2}{8f}. \quad (2.4)$$

При загрузении временной нагрузкой всего пролета коэффициент α соответствует коэффициенту распределения нагрузки между кабелем и балкой (по терминологии Н. С. Стрелецкого [53]). Коэффициент распределения может рассматриваться как одна из основных характеристик комбинированной системы при анализе прогибов и напряженного состояния конструкции под нагрузкой.

3. Применение метода начальных параметров к решению основного уравнения внешнераспорных комбинированных систем

Уравнение (2.2) — нелинейное, так как распор, возникающий в кабеле от действия временной нагрузки и входящий в выражение коэффициента деформативности, зависит от прогибов, которые, в свою очередь, зависят от положения и величины временной нагрузки.

Ж. Мелан впервые предложил линеаризовать уравнение висячих мостов путем полного пренебрежения в левой части уравнения величиной распора от временной нагрузки [67]. Но такое допущение может быть принято лишь для систем с большим собственным весом, в которых распор от постоянных нагрузок во много раз превосходит распор от временной нагрузки.

Применим к расчету легких комбинированных висячих систем метод последовательных приближений и принцип ступенчатой линеаризации — на каждой стадии расчета распор в кабеле от временной нагрузки будем считать постоянным, известным из предыдущей стадии расчета (в качестве первого приближения примем расчет по отвердевшей схеме или в некоторый запас коэффициент деформативности вычислим без учета распора от временной нагрузки). Такая линеаризация позволяет, не отказываясь от нелинейности задачи, использовать законы и методы строительной механики линейно-деформируемых систем для расчета данных конструкций на поперечные воздействия.

На каждой стадии приближения расчет будет сводиться к проверке правильности принятых параметров, зависящих от распоров

(в вантовых схемах, кроме этого, от продольных сил в балке), и к уточнению параметров расчета на следующей стадии приближения.

Решение линеаризованного дифференциального уравнения равновесия внешнераспорных комбинированных систем (2.2) будем искать с помощью метода начальных параметров, предложенного акад. А. Н. Крыловым для расчета балки на упругом основании и развитым для широкого класса задач строительной механики отечественными учеными [8, 22, 24, 25, 27, 40, 42, 48, 57].

Запишем уравнение (2.2) в общем виде для висячих и арочных систем:

$$\eta^{IV}(x) + s^2 \eta''(x) = 0. \quad (2.5)$$

Общий интеграл однородного уравнения (2.5) зависит от знака перед коэффициентом s^2 .

1. При $s^2 < 0$ уравнение (2.5) соответствует уравнению равновесия висячих и вантовых комбинированных систем. Положим $s = r$. Общее решение однородного уравнения (2.5) в этом случае запишется так:

$$\eta(x) = C_1 x + C_2 + C_3 \operatorname{sh} rx + C_4 \operatorname{ch} rx, \quad (г)$$

где $C_1 \div C_4$ — постоянные интегрирования.

2. При $s^2 > 0$ уравнение (2.5) будет однородной частью уравнения равновесия комбинированных систем, в состав которых кроме балки и кабеля входит гибкая арка (см. рис. 22).

Условие $s^2 > 0$ выполняется в том случае, если распор в арке больше распора в кабелях и вантах и устойчивость арки, безусловно, обеспечена [40]. Обозначим $s = u$.

Решение уравнения (2.5) при этом записывается в виде многочлена

$$\eta(x) = C_1 x + C_2 + C_3 \sin ux + C_4 \cos ux. \quad (д)$$

3. Уравнение (2.5) при $s = 0$ соответствует уравнению изгиба простой балки, оно принимается для приближенного расчета комбинированных висячих систем без учета прогибов по методу отвердения ($r = 0$) или арочных ($u = 0$). Для систем, в состав которых входят кабель, балка и гибкая арка, этот случай наблюдается при равенстве распоров в кабеле и арке:

$$\eta(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3. \quad (е)$$

Произвольные постоянные $C_1 \div C_4$ определяются путем использования дифференциальных зависимостей:

$$\varphi(x) = \frac{\eta'(x)}{l}; \quad M(x) = -\eta''(x) \frac{EI}{l^2}, \quad (2.6)$$

где $\varphi(x)$ — угол поворота сечения;

$M(x)$ — изгибающий момент в балке в сечении x .

Для получения решения в виде симметричной матрицы вычислим, по терминологии Н. В. Корноухова, «основную» поперечную

силу [25], т. е. суммарную (балочную) поперечную силу Q , воспринимаемую всей пролетной конструкцией — балкой, нитями и аркой. Для этого воспользуемся соотношениями [8]:

1) при $s^2 < 0$:

$$Q(x) = -[\eta'''(x) - r^2 \eta'(x)] \frac{EI}{l^3}; \quad (2.7a)$$

2) при $s^2 > 0$:

$$Q(x) = -[\eta'''(x) + u^2 \eta'(x)] \frac{EI}{l^3}; \quad (2.7b)$$

3) при $s = 0$:

$$Q(x) = -\eta'''(x) \frac{EI}{l^3}. \quad (2.7b)$$

Выполнив операции (2.6), (2.7) с многочленами (г) — (е) и положив абсциссы равными нулю, найдем постоянные интегрирования в зависимости от начальных параметров — прогиба η_0 , угла поворота φ_0 , момента M_0 и балочной поперечной силы Q_0 — в сечении $x = 0$. Так, например, при шарнирном опирании левого конца балки для уравнения (г):

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= Q_0 \frac{l^3}{r^3 EI}; & C_2 &= \eta_0 + M_0 \frac{l^2}{r^2 EI}; \\ C_3 &= \varphi_0 \frac{l}{r} - Q_0 \frac{l^3}{r^3 EI}; & C_4 &= -M_0 \frac{l^2}{r^2 EI}. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Подставляя найденные значения (ж) в выражение (г) и дифференцируя, получим общее решение уравнения, которое запишем в матричной форме:

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{A}(x) \mathbf{h}(0), \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} \eta(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}(0) = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Решение по формуле (2.8) — общее для уравнения (5) при любых знаках s^2 . Эта запись выражает преобразование вектора начальных параметров $\mathbf{h}(0)$, описывающего состояние балки в сечении $x = 0$, в вектор $\mathbf{h}(x)$ в сечении с абсциссой x с помощью переходной матри-

цы $\mathbf{A}(x)$, которая для уравнения (2.5) при $s^2 < 0$, $s^2 > 0$ и $s = 0$ имеет соответственно следующий вид:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{r} \operatorname{sh} rx & \frac{l^2}{r^2 EI} (1 - \operatorname{ch} rx) & \frac{l^3}{r^3 EI} (rx - \operatorname{sh} rx) \\ 0 & \operatorname{ch} rx & -\frac{l}{r} \frac{\operatorname{sh} rx}{EI} & \frac{l^2}{r^2 EI} (1 - \operatorname{ch} rx) \\ 0 & -\frac{rEI}{l} \operatorname{sh} rx & \operatorname{ch} rx & \frac{l}{r} \operatorname{sh} rx \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{u} \sin ux & -\frac{l^2}{u^2 EI} (1 - \cos ux) & -\frac{l^3}{u^3 EI} (ux - \sin ux) \\ 0 & \cos ux & -\frac{l}{u} \frac{\sin ux}{EI} & -\frac{l^2}{u^2 EI} (1 - \cos ux) \\ 0 & \frac{uEI}{l} \sin ux & \cos ux & \frac{l}{u} \sin ux \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 1 & lx & -\frac{l^2 x^2}{2EI} & -\frac{l^3 x^3}{6EI} \\ 0 & 1 & -\frac{lx}{EI} & -\frac{l^2 x^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & lx \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Вектор начальных параметров $\mathbf{h}(0)$ записывается в зависимости от характера закрепления левого конца балки. При шарнирном опирании $\eta_0 = M_0 = 0$, при жестком закреплении $\eta_0 = \varphi_0 = 0$, для свободного конца $M_0 = Q_0 = 0$.

Рассмотрим расчет висячей системы с постоянным значением коэффициента деформативности по длине пролета, т. е. с балкой постоянного сечения и без учета осевых сил, которые могут передаваться на балку от наклонных вант, если рассчитывается система с наклонными вантами, прикрепляемыми к балке.

Влияние сосредоточенного воздействия с абсциссой ξ на статические факторы системы выразится в скачкообразном изменении соответствующей функции на участке правее этого воздействия $x > \xi$ с отсчетом абсцисс сечений от точки ξ . Таким образом, в функциях, испытывающих разрыв, x должен быть заменен на $x - \xi$.

Например, при $s^2 < 0$ на шарнирно-опертую балку действует поперечная нагрузка P с абсциссой ξ . На участке $x \geq \xi$ запишем:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \varphi_0 \frac{l}{r} \operatorname{sh} rx + Q_0 \frac{l^3}{r^3 EI} (rx - \operatorname{sh} rx) - \\ &\quad - \frac{Pl^3}{r^3 EI} [r(x - \xi) - \operatorname{sh} r(x - \xi)]; \\ \varphi(x) &= \varphi_0 \operatorname{ch} rx - Q_0 \frac{l^2}{r^2 EI} (1 - \operatorname{ch} rx) - \\ &\quad - \frac{Pl^2}{r^2 EI} [1 - \operatorname{ch} r(x - \xi)]; \\ M(x) &= -\varphi_0 \frac{EI r}{l} \operatorname{sh} rx + Q_0 \frac{l}{r} \operatorname{sh} rx - P \frac{l}{r} \operatorname{sh} r(x - \xi); \\ Q(x) &= Q_0 - P. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Система (2.13) может быть записана в матричной форме:

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{A}(x) \mathbf{h}(0) - \mathbf{A}(x - \xi) \mathbf{h}_p, \quad (2.14)$$

где

$$\mathbf{h}_p^{-1} = [0 \ 0 \ 0 \ P].$$

Определение начальных параметров производится из двух уравнений системы (2.13) при $x = 1$, выражающих условия опирания конца балочного элемента.

4. Функции влияния и их применение к расчету висячих комбинированных систем

Определим прогиб балки постоянного сечения по длине пролета в предположении, что при изгибе балки соблюдается принцип независимости действия сил.

Прогиб балки в сечении x под действием сосредоточенной нагрузки P , находящейся на расстоянии ξ от левой опоры, определяется по формуле

$$\xi \eta(x, \xi) = \Phi_1(x, \xi) \frac{Pl^3}{EI}. \quad (2.15)$$

Здесь $\Phi_1(x, \xi)$ — функция двух переменных: относительной абсциссы сечения $x = \frac{x_1}{l}$ и положения груза в пролете $\xi = \frac{\xi_1}{l}$ (x и ξ — изменяются в пределах от 0 до 1). При фиксированных постоянных значениях x и ξ ($x = x_i$, $\xi = \xi_k$); $\Phi_1(x_i, \xi_k)$ — это числовой коэффициент, зависящий от значений x_i и ξ_k . Так, например, для шарнирно-опертой простой балки при $x_i = 0,5$; $\xi_k = 0,5$ (определяется прогиб под грузом, находящимся в середине пролета)

$$\Phi_1(0,5; 0,5) = \frac{1}{48} = 20,83333 \cdot 10^{-3}.$$

Величина этого коэффициента для произвольных x и ξ при различных способах опирания простой балки может быть определена с помощью интеграла Мора путем перемножения по правилу Верещагина эпор изгибающих моментов от единичных сил, приложенных в сечениях x и ξ .

В общем случае, если рассматривать x и ξ как независимые переменные, то функция $\Phi_1(x, \xi)$ будет представлять собой функцию влияния, характеризующую прогиб «единичной» балки ($l = 1$, $EI = 1$) в сечении x , вызванный поперечной силой $P = 1$, приложенной в точке ξ . Если в этой формуле зафиксировать сечение x и изменять положение ξ силы, то функция Φ_1 с учетом множителя $\frac{l^3}{EI}$ будет соответствовать уравнению линии влияния прогибов в сечении x .

Вычисление Φ_1 при постоянном положении груза ξ и переменном x даст эшору прогибов по длине балки от данного груза (с учетом $\frac{l^3}{EI}$). При постоянных x и ξ Φ_1 становится числовым коэффициентом в формуле прогиба (2.15).

Функция влияния Φ_1 обладает следующими свойствами:

- 1) симметрией относительно x и ξ : $\Phi_1(x, \xi) = \Phi_1(\xi, x)$, что соответствует теореме Бетти о взаимности перемещений $\delta_{ij} = \delta_{ji}$;
- 2) непрерывностью по длине балки вместе с двумя первыми производными;
- 3) разрывом третьей производной в точке $x = \xi$ на величину скачка, равную единице;
- 4) удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению оси изогнутой балки.

Выведем функцию влияния балки, изгиб которой описывается уравнением с однородной частью (2.5) при $s^2 < 0$. Такое уравнение описывает равновесие растянуто-изогнутых балок и висячих комбинированных систем.

Запишем значения прогибов и изгибающих моментов на правом конце шарнирно-опертой балки при действии сосредоточенной нагрузки в точке ξ . Для этого в первом и третьем уравнениях системы (2.13) положим $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 \frac{l}{r} \operatorname{sh} r + Q_0 \frac{l^3}{r^3 EI} (r - \operatorname{sh} r) - P \frac{l^3}{r^3 EI} [r(1 - \xi) - \\ - \operatorname{sh} r(1 - \xi)] = 0; \\ -\Phi_0 \frac{EI r}{l} \operatorname{sh} r + Q_0 \frac{l}{r} \operatorname{sh} r - P \frac{l}{r} \operatorname{sh} r(1 - \xi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Решение уравнений (2.13) облегчено тем, что начальный параметр Q_0 определяется как опорная реакция простой балки.

Таким образом, найдем

$$\Phi_0 = \frac{Pl^2}{EI r^2} \left[1 - \xi - \frac{\text{sh } r(1-\xi)}{\text{sh } r} \right];$$

$$Q_0 = P(1-\xi).$$

Подставляя найденные значения в уравнения (2.16) и загружая линии влияния сосредоточенными грузами P_k , получим:
при $\xi_k \leq x$:

$$\left. \begin{aligned} \eta(x) &= \frac{l^3}{EI} \sum_{k=1}^n P \frac{1}{r^3} \left[r\xi(1-x) - \frac{\text{sh } r\xi}{\text{sh } r} \text{sh } r(1-x) \right]; \\ \Phi(x) &= \frac{l^2}{EI} \sum_{k=1}^n P \frac{1}{r^2} \left[-\xi + \frac{\text{sh } r\xi}{\text{sh } r} \text{ch } r(1-x) \right]; \\ M(x) &= l \sum_{k=1}^n P \frac{\text{sh } r\xi}{r \text{sh } r} \text{sh } r(1-x); \\ Q(x) &= - \sum_{k=1}^n P \frac{\text{sh } r\xi}{\text{sh } r} \text{ch } r(1-x). \end{aligned} \right\} (2.17a)$$

Здесь и в последующем индексы k при абсциссах ξ_k и грузах P_k опущены;
при $\xi_k \geq x$:

$$\left. \begin{aligned} \eta(x) &= \frac{l^3}{EI} \sum_{k=1}^n P \frac{1}{r^3} \left[rx(1-\xi) - \frac{\text{sh } rx}{\text{sh } r} \text{sh } r(1-\xi) \right]; \\ \Phi(x) &= \frac{l^2}{EI} \sum_{k=1}^n P \frac{1}{r^2} \left[1 - \xi - \frac{\text{ch } rx}{\text{sh } r} \text{sh } r(1-\xi) \right]; \\ M(x) &= l \sum_{k=1}^n P \frac{\text{sh } rx}{r \text{sh } r} \text{sh } r(1-\xi); \\ Q(x) &= \sum_{k=1}^n P \frac{\text{ch } rx}{\text{sh } r} \text{sh } r(1-\xi). \end{aligned} \right\} (2.17b)$$

Введем обозначения функций влияния:

$\xi \leq x$:

$$\bar{\Phi}_1(x, \xi) = \frac{1}{r^3} \left[r\xi(1-x) - \frac{\text{sh } r\xi}{\text{sh } r} \text{sh } r(1-x) \right]; \quad (2.18a)$$

$x \leq \xi$:

$$\bar{\Phi}_1(x, \xi) = \frac{1}{r^3} \left[rx(1-\xi) - \frac{\text{sh } rx}{\text{sh } r} \text{sh } r(1-\xi) \right] \quad (2.18b)$$

или просто $\Phi_1(x, \xi)$, помня, что на участке изогнутой оси $x \geq \xi$ применима функция $\bar{\Phi}_1(x, \xi)$, а на участке $x \leq \xi$ — функция $\bar{\bar{\Phi}}_1(x, \xi)$. Таким образом (2.17) перепишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \eta(x) &= \frac{l^3}{EI} \sum_{k=1}^n P\Phi_1(x, \xi); \\ \varphi(x) &= \frac{l^2}{EI} \sum_{k=1}^n P\Phi_1'(x, \xi); \\ M(x) &= -l \sum_{k=1}^n P\Phi_1''(x, \xi); \\ Q(x) &= - \sum_{k=1}^n P\Phi_1'''(x, \xi). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Аналогично могут быть выведены функции влияния для сжато-изогнутых балок и висячих комбинированных систем, в состав которых входят гибкие арки, в случае, если распор в арке больше распора в кабеле и вантах при обеспечении устойчивости арки $N < 0,7 N_{кр}$, $s^2 > 0$ [40]:

$$\xi \leq x:$$

$$\bar{\Phi}_a = \frac{1}{u^3} \left[\frac{\sin \xi u}{\sin u} \sin(1-x)u - \xi u(1-x) \right]; \quad (2.20a)$$

$$\xi \geq x:$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_a = \frac{1}{u^3} \left[\frac{\sin xu}{\sin u} \sin(1-\xi)u - xu(1-\xi) \right]. \quad (2.20б)$$

Функции влияния простой балки или при расчете распорных систем по линейной схеме ($r = u = 0$)

$$\xi \leq x:$$

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{1}{6} \xi(1-x)(2x-x^2-\xi^2); \quad (2.21a)$$

$$\xi \geq x:$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_1 = \frac{1}{6} x(1-\xi)(2\xi-\xi^2-x^2). \quad (2.21б)$$

Распространим понятие «функция влияния прогибов» на функции при других видах загрузки. Так, в случае действия на балку непрерывной нагрузки, распределенной на участке $a - b$ по закону $q(\xi)$, функция влияния такой нагрузки на прогибы в сечении x может быть получена с помощью интеграла:

$$\Phi_2(x) = \int_a^b \Phi_1(x, \xi) q(\xi) d\xi. \quad (2.22)$$

Здесь при интегрировании должно быть учтено то обстоятельство, что при расположении груза на участках левее расчетного сечения

($\xi \leq x$) и правее ($\xi \geq x$) функция влияния описывается симметричными уравнениями $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_1$. Например, в случае $a < x < b$ для получения интеграла на участке от a до x воспользуемся функцией $\bar{\Phi}_1$, а на участке от x до b — функцией $\bar{\Phi}_1$.

Для равномерного нагружения балки в пределах от a до b получим

$$\Phi_2(x) = \int_a^x \bar{\Phi}_1 d\xi + \int_x^b \bar{\Phi}_1 d\xi. \quad (2.23)$$

Запишем функции влияния прогибов балок и рассматриваемых комбинированных систем при нагружении равномерной нагрузкой всего пролета:

$$s^2 < 0:$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{r^3} \left[\frac{rx}{2} (1-x) + \frac{\operatorname{ch} r \left(\frac{1}{2} - x \right)}{r \operatorname{ch} \frac{r}{2}} - \frac{1}{r} \right]; \quad (2.24)$$

$$s^2 > 0:$$

$$\Phi_{2a}(x) = \frac{1}{u^3} \left[\frac{\cos u \left(\frac{1}{2} - x \right)}{u \cos \frac{u}{2}} - \frac{ux}{2} (1-x) - \frac{1}{u} \right]; \quad (2.25)$$

$$s = 0:$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{24} (x - 2x^3 + x^4). \quad (2.26)$$

В частности, из (2.26) следует, что при $x = 0,5$

$$\Phi_2 = \frac{5}{384}, \quad (2.27)$$

формула прогиба в середине пролета балки совпадает с формулой, известной из курса сопротивления материалов.

Отметим, что функция Φ_2 имеет непрерывные производные выше второй, она может иметь в качестве аргумента как x , так и ξ . При этом в первом случае $\Phi_2(x) \frac{l^4}{EI}$ выражает прогиб в сечении x балки от равномерно распределенной единичной нагрузки, а во втором $\Phi_2(\xi) \frac{l^4}{EI}$ соответствует сумме прогибов по всей длине балки при действии единичной сосредоточенной силы, расположенной в сечении ξ .

Операции интегрирования, указанные в формулах (2.22) и (2.23), удобно производить с помощью малых ЭЦВМ типа МИР, в которых эти действия включены в язык машины. Количество интервалов для интегрирования может быть принято минимальное (10—20), так как подынтегральная функция в пределах интегрирования изменяется плавно.

При расчете статически неопределимых систем в ряде случаев бывает необходимым определять суммы прогибов на участках балки от распределенных воздействий. В этом случае интегрирование выполняется как по ξ (от a до x — интегрируется $\bar{\Phi}_1$ и от x до b — интегрируется $\bar{\Phi}_1$), так и по x — интегрирование выполняется непрерывно от нижнего до верхнего предела. Например, равномерная нагрузка q_1 находится на участке $a - b$, а суммирование прогибов требуется выполнить на участке $m - n$ по направлению равномерной единичной нагрузки $q_2 = 1$.
Запишем:

$$\delta_{21} = \frac{q_1 q_2 l^5}{EI} \int_m^n \int_a^b \bar{\Phi}_1(x, \xi) d\xi dx. \quad (2.28)$$

При суммировании прогибов на всем пролете от единичной ($q_1 = 1$) нагрузки, загружающей весь пролет, получим

$$\Phi_3 = \int_0^l \left(\int_0^x \bar{\Phi}_1 d\xi + \int_x^l \bar{\Phi}_1 d\xi \right) dx. \quad (2.29)$$

Для простой балки при $r = 0$ $\Phi_3 = \frac{1}{120}$, для растянутых балок и висячих систем

$$\Phi_3 = \frac{1}{r^3} \left[\frac{r}{12} + \frac{2 \operatorname{th} \frac{r}{2}}{r^2} - \frac{1}{r} \right]. \quad (2.30)$$

Чтобы определить поперечные перемещения от действия внешнего сосредоточенного момента, приложенного в сечении ξ , воспользуемся теоремой о взаимности работ (при $M = 1$, $P = 1$):

$$M \varphi_p(x, \xi) = -P \eta_m(x, \xi). \quad (2.31)$$

Отсюда следует

$$\eta(x, \xi) = \frac{M l^2}{EI} \cdot \frac{\partial \Phi_1(x, \xi)}{\partial \xi}. \quad (2.32)$$

Аналогично угол поворота от момента M_1 в сечении, где приложен момент $M_2 = 1$:

$$\varphi_{21} = \frac{M_1 l}{EI} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1(x, \xi)}{\partial x \partial \xi}. \quad (2.33)$$

Формулы функций влияния, с помощью которых вычисляются углы поворота сечений, изгибающие моменты и поперечные силы для наиболее употребимых видов загрузки, приведены в приложении.

В случае действия на балку нескольких нагрузок их суммируют в соответствии с принципом независимости действия сил по правилам, которые приняты для линий влияния, — производится инте-

грирование функций от распределенных воздействий и сложение функций влияния от сосредоточенных сил. Справедливость принципа наложения соблюдается для нелинейных задач постольку, поскольку при этих операциях сохраняется постоянство (или, точнее, допустимо малое изменение) распора, а следовательно, принимается постоянное значение коэффициента деформативности (такое малое его изменение, которое практически не влияет на результаты расчета).

Единая форма записи функций влияния как для расчета по методу отвердения ($r = 0$), так и с учетом геометрической нелинейности ($r \neq 0$) удобна при отладке программ машинного расчета. Известно, что на отработку программ при освоении новых методов или при расчете конструкций новых видов затрачивается много времени. В данном случае могут быть использованы хорошо известные и легко контролируемые методы строительной механики линейно-деформируемых систем, но все операции должны быть записаны с помощью функций влияния при $r = 0$ (приложение, графа 4).

После отладки программ на стадии линейного расчета методика переписывается для $r \neq 0$ в одноименных функциях влияния, взятых из графы 5 приложения. Возможен обратный переход: раскладывая функции влияния при $r \neq 0$ в ряд Тейлора и удерживая первые члены разложения, получим при $r = 0$ функции влияния линейного расчета.

Впервые функции влияния в рассмотренном здесь виде были предложены акад. А. И. Крыловым для динамического расчета балок [27], затем в такой же записи они были использованы А. А. Белосусом для расчета арочных комбинированных систем с учетом геометрической нелинейности [3]. Для расчета висячих мостов функции влияния применялись С. Асплундом [62], С. А. Степкиным [51], И. С. Дуровым [11] и В. Г. Беликовым [2]. Функции влияния были применены нами для расчета статически неопределимых систем с одной и тремя лишними связями¹.

5. К расчету статически неопределимых висячих и вантовых систем с учетом геометрической нелинейности

Принятая линеаризация дифференциального уравнения равновесия висячей системы путем установления постоянного распора на каждой стадии расчета статически неопределимой системы позволяет использовать законы и методы строительной механики линейно-деформируемых систем для расчета на поперечные воздействия нелинейных систем, к которым относятся вантовые внешнераспорные конструкции. Таким образом, к расчету многократно статически неопределимых висячих систем могут быть применены при-

¹ Н. М. Қирсанов. Расчет двухкабельных висячих систем по деформированной схеме. В сб. трудов ЦНИИСК. Стройиздат, 1964.

вычные для проектировщиков методы, основанные на составлении системы канонических уравнений, использовании линий влияния для подвижных нагрузок, применены известные методы оптимального проектирования и т. п. На каждой стадии последовательных приближений уточняется лишь основной параметр уравнения — коэффициент деформативности, и так как сходимость решений быстрая, для получения практически повторяемых результатов достаточно двух-трех приближений.

Способ расчета статически неопределимой системы выбирается по тем же соображениям, что и при расчете по методу отвердения. Отличие в этих расчетах состоит в том, что при определении единичных перемещений балки нельзя воспользоваться способом Верещагина, так как эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий криволинейны. Поэтому используются формулы стандартных функций, зависящих от коэффициента деформативности, абсцисс сечения и единичного груза (см. приложение).

Слагаемые перемещения δ_{ij} , зависящие от продольных удлинений кабелей и вант, определяются в основной части расчета в предположении линейной деформации системы. Однако при необходимости они могут быть уточнены с помощью теории гибких нитей.

Для комбинированных систем, у которых поперечные сечения балки изменяются ступенчато по длине пролета, а также ступенчато изменяются осевые усилия в балке, благодаря включению в схему нисходящих вант или изменяется распор в кабеле (в случае усиления однокабельной системы восходящими вантами), уравнение (2.14) должно быть заменено следующим:

$$h(x) = \prod_{v=1}^{\mu} A_{v0} h(0) - \sum_{v=1}^i \prod A h_p, \quad (2.34)$$

где \sum — знак суммирования произведений переходных матриц, в которых аргумент x заменен на $x - \xi(x)$, ξ — безразмерные абсциссы сечения и положения нагрузки, на каждом участке они принимают значения от 0 до 1);

l'_v — относительная длина участка v , имеющего постоянное значение r_v ; сумма относительных длин участков в пролете равна единице;

μ — число участков.

В нагрузки на балку должны входить равномерные усилия от подвесок.

Распор от временных нагрузок находим, применяя к деформациям системы принцип Лагранжа [51]:

$$\frac{H_p L}{E_k F_k} = \frac{8f}{l^2} \sum_{i=1}^{\mu} l \int_0^1 \eta_i(x) dx \pm \omega_i t L_a. \quad (2.35)$$

При расчете статически неопределимой системы со ступенчато-переменным коэффициентом деформативности с помощью метода

сил перемещения балки от единичной силы определяются по формуле (2.34). Перемещения Δ_{1p} в заданном сечении находим интегрированием уравнения (34) по x — как сумму перемещений от сосредоточенной силы по длине пролета или как прогиб в сечении x от распределенной нагрузки.

Сумма перемещений от равномерно распределенной нагрузки по всему пролету вычисляется двойным интегрированием уравнения (2.34) по x и ξ .

При интегрировании уравнения изогнутой оси балки со ступенчато-переменным по длине пролета коэффициентом деформативности необходимо предварительно определить прогибы на границах участков.

В остальном расчет статически неопределимых висячих систем производится так же, как рассмотрено выше.

ГЛАВА III

РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ПОДВЕСКАМИ

1. Однопролетная схема: балка с кабелем

Определение распора, прогибов и изгибающих моментов. Предположим, что геометрические характеристики схемы — пролет, стрела провеса кабеля, длины и углы наклона оттяжек — заданы. Известны также размеры сечений кабеля и балки, а также модули упругости материалов, из которых они изготовлены. В главе I нами рассмотрены компоновочные расчеты висячих комбинированных конструкций. С помощью этих расчетов все недостающие параметры схемы в первом приближении должны быть выбраны.

Результатом уточненного расчета должно быть определение прогибов системы, распоров в кабеле, изгибающих моментов и поперечных сил в балке при действии подвижных временных нагрузок.

Основная расчетная характеристика системы r определяется по формуле (2.3) приближенно для каждого нагружения пролета временной нагрузкой, так как при каждом нагружении изменяется распор от временной нагрузки. Если отношение постоянной нагрузки к временной таково, что изменение коэффициента r при новых нагружениях составляет не более 10—15%, то можно пользоваться постоянным значением коэффициента деформативности независимо от изменения временной нагрузки.

Уточненный расчет начнем с определения распора в кабеле с учетом геометрической нелинейности. Воспользуемся методом