

## РАСЧЕТ КОМБИНИРОВАННЫХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ, УСИЛЕННЫХ ВАНТАМИ, И РАСЧЕТ ВАНТОВЫХ СХЕМ

### 1. Системы, усиленные нисходящими вантами

Включение радиальных вант (нисходящих или восходящих) в висячую систему с вертикальными подвесками — один из наиболее простых и эффективных способов уменьшения кинематических перемещений системы (см. рис. 2, 3). Такие схемы могут быть применены как для вновь возводимых сооружений, так и для увеличения жесткости существующих конструкций. При этом в системе с нисходящими вантами достигается разгрузка основного кабеля на 15—20%, так как часть временной нагрузки воспринимается дополнительным несущим поясом, в который входят нисходящие ванты и средний участок балки. Эта разгрузка способствует уменьшению продольных удлинений основного кабеля, а следовательно, уменьшению прогибов в середине пролета конструкции при загрузке конструкции распределенной нагрузкой [32].

Особенности компоновки систем с нисходящими вантами следующие. Нижние концы вант рекомендуется прикреплять к балке на расстоянии от опоры в пределах (0,15—0,35)  $l$ . При пролетах сооружений до 150 м число вант может быть небольшое — 2—3 от каждого пилона. Увеличение числа вант приводит к усложнению конструкции верхних узлов прикрепления вант, производства монтажа и регулировки усилий во время возведения сооружения. Площадь поперечного сечения вант определяется их прочностью и составляет в зависимости от соотношения временной и постоянной нагрузок 0,05—0,2 площади сечения основного кабеля.

Для вновь проектируемых сооружений, в которых предполагается использовать нисходящие ванты, рекомендуется принимать такую высоту пилона, чтобы ванты не пересекали кабель, т. е. расстояние между нижней точкой кабеля в середине пролета и верхом балки должно составлять приблизительно  $\frac{1}{5}$  стрелы провеса кабеля.

Для приближенного расчета, который обычно делается при выборе вариантов или при компоновке системы, можно воспользоваться правилом замены пучка вант одной вантой, площадь сечения которой равна сумме площадей вант, входящих в пучок, а положение совпадает с осью (равнодействующей) пучка. Исследования показали, что прогибы и изгибающие моменты, найденные для такой условной схемы в месте прикрепления равнодействующей ванты, отличаются от точных значений не более чем на 10%.

При усилении существующих конструкций вантами должны быть проверены анкера на прочность при воздействии на пролет

сосредоточенных грузов, так как линии влияния усилий в анкере для таких схем, в отличие от обычной системы, имеют несимметричный характер и увеличенные ординаты в месте прикрепления вант к балке. Отметим, что одновременное применение нескольких мероприятий по уменьшению кинематических перемещений, например прикрепление кабеля к балке в середине пролета и усиление вантами, не дает ожидаемого эффекта. Наибольшая эффективность достигается от одного из этих мероприятий: второе усиление уменьшает прогибы лишь незначительно.

В основу расчета данной нелинейной статически неопределимой системы кладутся те же предпосылки, что и для рассмотренных выше систем; применяется тот же итерационный метод и, кроме того,

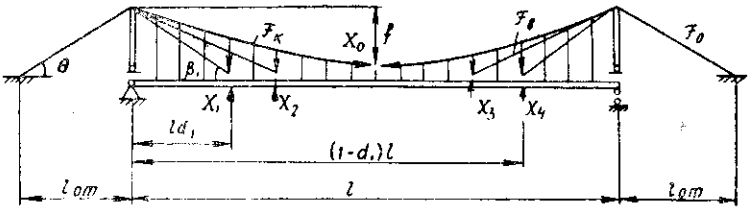


Рис. 23. Основная система метода сил для расчета схемы с нисходящими вантами

для упрощения расчета принимают, что коэффициент деформативности по длине пролета не изменяется. Это значит, что не учитываются осевые силы, возникающие от воздействия вант на балку. Расчетный распор для определения коэффициента деформативности независимо от способа монтажа вант и от степени их натяжения постоянной нагрузкой принимается равным горизонтальной проекции усилия в оттяжке на уровне верха пилона. Предпосылка о постоянстве распора по длине пролета существенно упрощает расчет, так как позволяет воспользоваться методикой расчета систем с постоянными характеристиками по длине пролета — использовать функции влияния, выведенные выше. Как показали сопоставления результатов, найденных по этой методике и по уточненной (с учетом переменного коэффициента деформативности), они отличаются здесь в допустимых пределах (до 2%).

Вторая расчетная предпосылка — о невыключаемости вант при данном нагружении пролета временной нагрузкой. Невыключаемость вант обеспечивается предварительным натяжением их во время монтажа, т. е. передачей на ванты части постоянной нагрузки. Если из расчета выяснится, что те или иные ванты выключаются, то в последующих итерациях вносятся поправки в расчетную схему.

Выбор основной системы метода сил показан на рис. 23.

В качестве неизвестных приняты распор и вертикальные состав-

ляющие усилий в вантах, которые определяются из системы канонических уравнений:

$$\sum_{j=0}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где  $n$  — число вант.

Перемещения в разрезе основного кабеля вычисляются в соответствии с формулой (3.5):

$$\delta_{00} = \frac{z^2 l^3}{EI} \Phi_3 \cdot \left| \cdot \frac{L}{E_R F_R} \right|; \quad (4.2)$$

$\delta_{0i}$  — это перемещения балки в месте прикрепления ванты в сечении  $d_i$  от равномерно распределенного воздействия подвесок и от удлинения оттяжного кабеля;

$$\delta_{0i} = \frac{z l^3}{EI} \Phi_2(d_i) \cdot \left| \cdot \frac{l_{от} \mu}{E_0 F_0 \operatorname{tg} \beta_i \cos^2 \theta} \right|. \quad (4.3)$$

Перемещения типа  $\delta_{ij}$  — это прогибы балки в сечении  $d_i$  от действия единичной силы в разрезе ванты с абсциссой  $d_j$ ; с учетом удлинения оттяжки (если у этих вант имеется общая оттяжка)

$$\delta_{ij} = \frac{l^3}{EI} \Phi_1(d_i, d_j) \cdot \left| \cdot \frac{l_{от} \mu}{E_R F_R \operatorname{tg} \beta_i \operatorname{tg} \beta_j \cos^3 \theta} \right|; \quad (4.4)$$

$$\delta_{ii} = \frac{l^3}{EI} \Phi_1(d_i, d_j) \cdot \left| \cdot \frac{d_i}{E_B F_B \sin^2 \beta_i \cos \beta_i} \right| \cdot \left| \cdot \frac{l_{от} \mu}{E_0 F_0 \operatorname{tg}^2 \beta_i \cos^3 \theta} \right|. \quad (4.5)$$

Здесь  $\Phi_1(d_i, d_j)$ ,  $\Phi_2(d_i)$  — функции влияния (см. приложение), в которых вместо  $x$  и  $\xi$  принимаются  $d_i$  и  $d_j$ ;

коэффициент деформативности  $r$  — см. (2.3), где  $H_p$  — горизонтальная проекция усилия в боковой (береговой) оттяжке;

$d_i$  — относительное (деленное на пролет) расстояние от левой опоры точки прикрепления к балке  $i$  — ванты;  $0 < d_i < 1$ . При  $d_i > 0,5$  в формуле (4.5) вместо  $d_i$  принимается  $1 - d_i$ ;

$\beta_i$  — угол наклона ванты к горизонту;

$E_B F_B$ ;  $E_R F_R$ ;  $E_0 F_0$  — продольная жесткость вант, кабеля и оттяжки;

$L$ ,  $\mu$ ,  $z$  — см. (3.4), (3.55а).

Грузовые члены системы уравнений (4.1) при действии одиночной силы  $P$  определяются по формулам:

$$\Lambda_{0p} = - \frac{Pz l^3}{EI} \Phi_2(\xi); \quad (4.6)$$

$$\Delta_{ip} = - \frac{P l^3}{EI} \Phi_1(d_i, \xi). \quad (4.7)$$

Прогибы, изгибающие моменты и поперечные силы в балке определяются из рассмотрения равновесия балки под действием внеш-

ней нагрузки, распределенных усилий от подвесок и сосредоточенных воздействий от вант:

$$\eta(x) = \frac{Pl^3}{EI} [\Phi_1(x, \xi) - \alpha(\xi) \Phi_2(x) - \sum \Phi_1(d, x) X_i(\xi)]; \quad (4.8)$$

$$M(x) = -Pl [\Phi_1''(x, \xi) - \alpha(\xi) \Phi_2''(x) - \sum \Phi_1''(d, x) X_i(\xi)]; \quad (4.9)$$

$$Q(x) = -P [\Phi_1'''(x, \xi) - \alpha(\xi) \Phi_2'''(x) - \sum \Phi_1'''(d, x) X_i(\xi)]; \quad (4.10)$$

В случае большого числа вант и при использовании для расчета ЭЦВМ удобно пользоваться матричной записью вычислительных операций.

Представим систему канонических уравнений и ее решение в матричной форме:

$$AX + \Delta_p = 0; \quad (4.11)$$

$$X = -A^{-1} \Delta_p = L_x; \quad (4.12)$$

$$A = A_\sigma + A_\epsilon. \quad (4.13)$$

Матрицы осевых усилий в элементах системы, прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил могут быть записаны в следующей форме:

$$S^* = SL_x p = L_s p; \quad (4.14)$$

$$\eta^* = (\bar{y}E - \bar{y}L_x) \bar{p} = L_\eta p; \quad (4.15)$$

$$M = (\bar{m}E - \bar{m}L_x) \bar{p} = L_M p; \quad (4.16)$$

$$Q = (\bar{q}E - \bar{q}L_x) \bar{p} = L_Q p. \quad (4.17)$$

Здесь  $A_\sigma, A_\epsilon$  — матрицы перемещений от продольных удлинений стержней и от изгиба балки;

$\Delta_p$  — матрица перемещений от единичной внешней нагрузки;

$S$  — матрица усилий в вантовых элементах;

$L_s$  — матрица влияния усилий в вантовых элементах;

$y, m, q$  — матрицы влияния прогибов, моментов и поперечных сил в балке основной системы от лишних неизвестных;

$\bar{y}, \bar{m}, \bar{q}$  — то же, от единичных сил;

$L_\eta, L_M, L_Q$  — матрицы влияния прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил.

На рис. 24 приведены коэффициенты для вычисления по формулам (3.18) ординат линий влияния систем, усиленных нисходящими вантами при  $\frac{f}{l} = \frac{1}{8}, n_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ .

Опыт проектирования рассмотренных здесь конструкций, экспериментальные исследования на моделях и практика использования нисходящих вант для усиления висячих мостов показывают, что с помощью вант прогибы в четверти пролета могут быть умень-

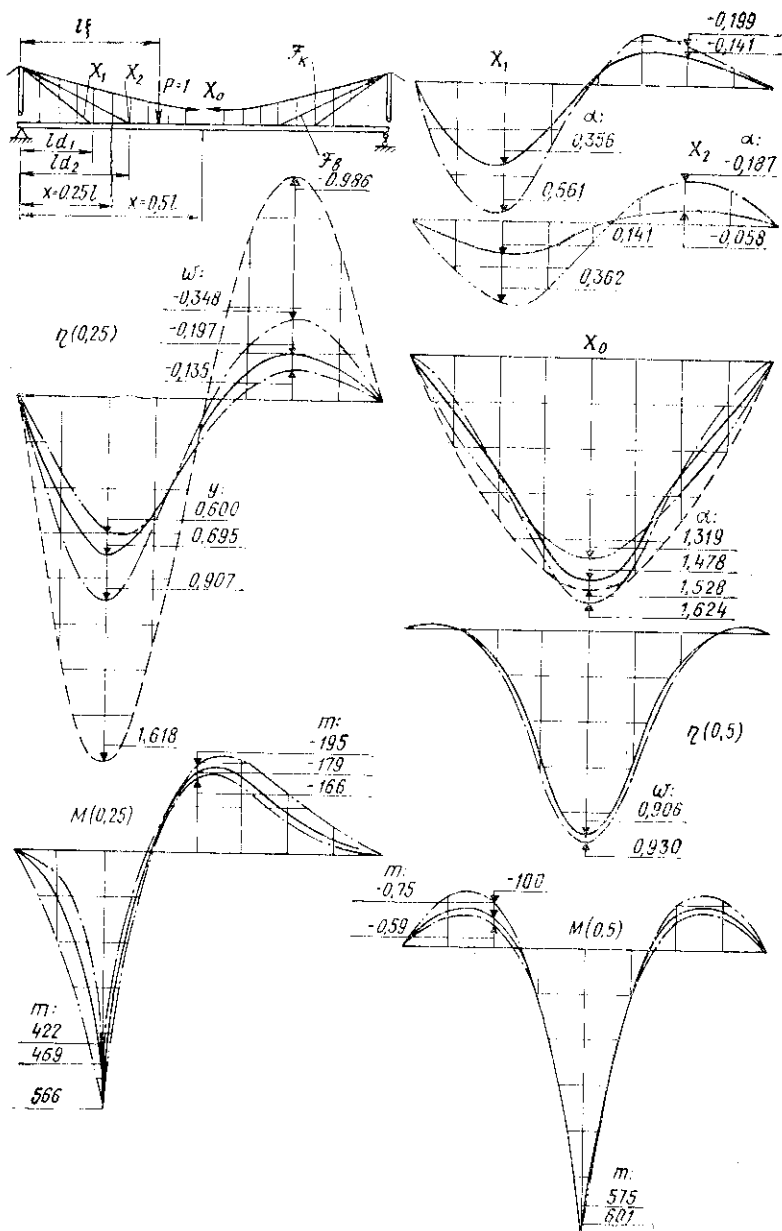


Рис. 24. Линия влияния систем, усиленных нисходящими вантами  
 $\alpha, \omega, m$  — коэффициенты для вычисления ординат линий влияния по формулам (3.18). Обозначения: — система без вант; — система с одной парой вант при  $F_B=0,1 F_R$ ;  $d_1=0,2 l$ ; ····· то же, при  $d_1=0,3 l$ ; — система с двумя парами вант при  $F_B=0,05 F_R$ ;  $d_1=0,2 l$ ;  $d_2=0,3 l$ .

шены в 2—3 раза. Пролетное строение при таком усилении не испытывает s-образного изгиба. Однако в ряде случаев при жестких вантах возможно увеличение прогибов в середине пролета при действии сосредоточенных грузов — ординаты линий прогибов в середине пролета усиленной системы получают увеличение по сравнению с неусиленной, хотя сумма ординат по пролету уменьшается.

Расчет усиленных схем с учетом геометрической нелинейности следует производить при  $r \geq 4$  и при  $F_B: F_H < 0,1$ .

## 2. Расчет систем, усиленных восходящими вантами

Для расчета с учетом геометрической нелинейности висячей комбинированной системы, усиленной восходящими вантами, примем следующие дополнительные расчетные предпосылки:

1) распор в кабеле не изменяется по длине пролета; поэтому коэффициент деформативности, вычисленный по формуле

$$r = l \sqrt{\frac{H_q + H_p + H_{п.н}}{EI}}, \quad (4.18)$$

может быть принят постоянным по длине пролета;

2) систему рассчитывают в предположении, что восходящие ванты при действии временной нагрузки не включаются и рассматриваются как стержни, которые могут воспринимать сжатие. Это допущение основывается на том, что предварительное напряжение вант больше возможного сжатия в них. Если предварительное напряжение не может обеспечить невыключаемость каких-либо элементов, расчетная схема изменяется после первого приближения и выполняется дополнительный расчет, учитывающий выключение элементов.

Кроме принятого здесь итерационного подхода, в настоящее время развиваются методы расчета вантовых систем с переменными связями, основанные на применении математического программирования [39]; на представлении выключаемых стержней как элементов с переменным модулем упругости, который при сжатии близок к нулю [45]; на точной записи нелинейных уравнений равновесия вант, как гибких нитей, которые, рассуждая строго, и при больших стрелах провеса не выключаются из работы [37]. Все перечисленные методы расчета систем с переменными связями требуют использования для расчета ЭЦВМ большой мощности с обширной оперативной памятью.

Что касается итерационного метода установления «рабочей схемы» [52], то в подавляющем большинстве случаев он быстро сходится, легко подвергается контролю и управлению на всех стадиях приближения, а также вполне согласуется с принятым здесь способом учета геометрической нелинейности. Основная система метода сил показана на рис. 25.

В первом состоянии перемещения  $\delta_{00}$  определяются так же, как в обычной, неусиленной схеме:

$$\delta_{00} = \frac{z^2 l^3}{EI} \Phi_3 + \frac{L}{E_R F_R}. \quad (4.19)$$

Перед тем как выводить формулы единичных перемещений в других состояниях, рассмотрим грузовые перемещения от силы  $P$ , приложенной к балке.

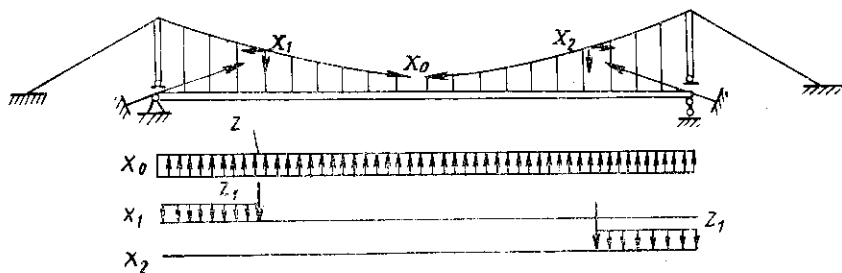


Рис. 25. Основная система для расчета схемы с восходящими вантами и воздействия на балку от неизвестных усилий

Из расчета обычной системы известно:

$$\Delta_{0P} = \frac{P \delta f}{l} \cdot \frac{l^3}{EI} \Phi_2(\xi). \quad (4.20)$$

В каждом состоянии основной системы, соответствующем перемещениям ванты, от единичного горизонтального усилия, приложенного к кабелю в месте разреза ванты, возникает распределенное воздействие подвесок на балку на участке от разреза ванты до опоры с равномерной интенсивностью

$$z_i = \frac{\delta f}{l} \cos \beta_i. \quad (4.21)$$

Следовательно, для определения перемещений типа  $\Delta_{iP}$ , которые в силу закона взаимности перемещений равны  $\Delta_{Pi}$ , проинтегрируем перемещения балки в направлении силы  $P$  от распределенной нагрузки  $z_i$  на участке  $0 - d_i$  и учтем перемещения от сосредоточенной силы — вертикальной составляющей усилия в ванте в месте прикрепления ее к кабелю, равной  $1 \sin \beta_i$ :

$$\Delta_{iP} = \frac{Pl^3}{EI} \left[ z_i \int_0^{d_i} \Phi_1(x, \xi) dx + \Phi_1(d_i, \xi) \sin \beta_i \right]. \quad (4.22)$$

Здесь  $\Phi_1(x, \xi)$  принимается в зависимости от соотношения между  $x$  и  $\xi$  [см. формулы (1), (5) приложения]. Для вант, расположенных справа, пределы интегрирования принимаются от  $1 - d_i$  до 1.

Балочные перемещения типа  $\delta_{0i}^0$  представим как сумму прогибов балки на участке  $0 - d_i$  от равномерной нагрузки  $z$ , распределенной по всему пролету, и прогиб в направлении составляющей усилия в ванте от той же нагрузки  $z$ :

$$\delta_{0i}^0 = z \int_0^1 \frac{\Delta_{ip}}{P} d\xi = z \frac{l^3}{EI} \left[ z \int_0^{d_i} \Phi_2(x) dx + \Phi_2(d_i) \sin \beta_i \right]. \quad (4.23)$$

Перемещения от удлинения оттяжки и кабеля на общем участке  $0 - d_i$

$$\delta_{0i}^k = -\frac{L_d}{E_R F_R} \cos \beta_i - \frac{l_{OT}}{E_O F_O} \mu \left( 1 + 16 \frac{l^2}{l^2} \right); \quad (4.24)$$

$$L_d = l \int_0^d \frac{dx}{\cos^3 \varphi} = \int_0^d (1 + y'^2) \left( 1 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \approx \approx ld \left[ 1 + 24 \frac{l^2}{l^2} (1 - d)^2 \right]. \quad (4.25)$$

Рассуждая аналогично (4.23), но меняя пределы интегрирования, найдем с использованием формул приложения и (3.102):

$$\delta_{ij}^0 = \frac{l^3}{EI} \left[ z_i z_j \int_0^{d_j} \int_0^{d_i} \Phi_1(x, \xi) dx d\xi + \Phi_1(d_i, d_j) \sin \beta_i \sin \beta_j + z_i \sin \beta_j \int_0^{d_i} \Phi_1(\xi, d_j) d\xi + z_j \sin \beta_i \int_0^{d_j} \Phi_1(\xi, d_i) d\xi \right]. \quad (4.26)$$

Перемещения от удлинения оттяжки и кабеля на общем участке  $0 - d_i - \text{см. формулу (24)} (d_i \leq d_j)$ .

При  $i = j$  добавятся удлинения ванты:

$$\delta_{ii}^k = \frac{L_{di}}{E_R F_R} \cos^2 \beta_i + \frac{l_{OT}}{E_O F_O} \mu \left( 1 + 16 \frac{l^2}{l^2} \right) + \frac{L_R}{E_B F_B}. \quad (4.27)$$

Побочные взаимные перемещения в разрезах вант, расположенных на противоположных концах пролета  $\delta_{ij}$ , могут быть найдены по формуле (4.26) при измененных пределах интегрирования:

$$\delta_{ij} = \frac{l^3}{EI} \left[ z_i z_j \int_0^{d_i} \int_{1-d_j}^1 \Phi_1(x, \xi) dx d\xi + \Phi_1(d_i, d_j) \sin \beta_i \sin \beta_j + z_i \sin \beta_j \int_0^{d_i} \Phi_1(\xi, 1 - d_j) d\xi + z_j \sin \beta_i \int_{1-d_j}^1 \Phi_1(\xi, d_i) d\xi \right]. \quad (4.28)$$



Перемещения от удлинения кабеля и вант в последнем случае отсутствуют, так как нет общей оттяжки.

Обозначения в (4.19) — (4.28) приняты такие же, как для схем с нисходящими вантами.

Прогибы балки могут быть определены из рассмотрения равновесия балки

$$\eta(x, \xi) = \frac{Pl^3}{EI} \left[ \Phi_1(x, \xi) - \alpha \Phi_2(x) - \sum_i^n X_i z_i \int_0^{d_i} \Phi_1(x, \xi) d\xi \right]. \quad (4.29)$$

Для определения изгибающих моментов и поперечных сил в формуле (4.29) заменяется первый множитель соответственно на  $-Pl$  или  $-P$ , а также вместо функций влияния  $\Phi$  должны быть взяты вторые и третьи производные функций по  $x$ . Изложенный здесь расчет может быть записан в матричной форме, как это показано для схемы с нисходящими вантами.

Сопоставляя два способа усиления висячих комбинированных систем с помощью вант, следует отметить, что по характеру линий влияния оба способа почти одинаковы.

Недостаток схемы с восходящими вантами — выключение вант при загрузке всего пролета временной нагрузкой. Однако при загрузке части пролета восходящие ванты резко уменьшают s-образный изгиб, устраняя подъем незагруженной части пролета. Поэтому наиболее рационально применять такое усиление в качестве стабилизации системы при действии местных нагрузок или же аэродинамических воздействий как на время монтажа, так и на время эксплуатации сооружения.

Преимущество систем с восходящими вантами — широкая возможность предварительного напряжения конструкции независимо от величины постоянной нагрузки. С увеличением натяжения вант могут искажаться очертания основного кабеля — он из параболического может становиться ломаным с прямыми или криволинейными участками между точками прикрепления вант. Предварительное напряжение как улучшение висячей конструкции проявляется особенно во время монтажа — подвешивание балок к стабилизированной системе тросов, регулировка усилий и длин в таких условиях выполняется гораздо легче, чем в гибких, геометрически изменяемых схемах.

### 3. Учет переменности коэффициента деформативности по длине пролета в вантовых системах

Уточнение, которое вносит в расчет переменность осевой силы по длине пролета вследствие воздействия вант на балку, может быть существенным, если нисходящие ванты предварительно напряжены

большой постоянной нагрузкой. То же относится и к восходящим вантам. Для расчета пролет балки делят на участки с постоянными значениями коэффициента деформативности. При этом могут быть учтены ступенчатые изменения сечения балки по длине пролета.

Для определения единичных перемещений балочного элемента, изгиб которого на каждом участке описывается уравнением (2.2) с постоянными коэффициентами, воспользуемся методом начальных параметров в матричной форме.

Считая, что осевые силы найдены приближенными методами без учета прогибов или в предположении постоянного коэффициента деформативности и вычислены коэффициенты деформативности для каждого участка, запишем общее решение уравнения равновесия балки в следующей форме:

$$\mathbf{h}_n = \prod_{k=n}^1 \mathbf{A}_{k_0} \times \mathbf{h}(0) - \sum_{k=1}^i \mathbf{P}\mathbf{A} \times \mathbf{h}_p; \quad (4.30)$$

$$\prod_{k=n}^1 \mathbf{A}_{k_0} = \mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_{k-1} \times \dots \times \mathbf{A}_1, \quad (4.31)$$

где  $\mathbf{h}(0)$  — матрица-столбец начальных параметров, записываемая в зависимости от характера закрепления левого конца балки:

$$\mathbf{h}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \text{ (а); } \mathbf{h}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \text{ (б); } \mathbf{h}(0) = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (в).} \quad (4.32)$$

Шарнирному опиранию соответствует столбец (а), жесткому закреплению — (б), для свободного конца — (в).

$\mathbf{h}_p$  — матрица-столбец нагрузок и начальных отклонений от прямой оси балки.

Сосредоточенные воздействия

$$\mathbf{h}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \text{ (г); } \mathbf{h}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (д).} \quad (4.33)$$

Формулы (4.33) соответствуют: (г) — поперечной силе, (д) — моменту.

Матрицы-столбцы распределенных воздействий получают интегрированием соответствующих функций влияния в пределах расположения нагрузки.

Для вычисления единичных перемещений балки комбинированной системы, рассчитываемой по методу сил, необходимо знать начальные параметры, которые определяются из двух уравнений, выражающих условия опирания правого конца балочного элемента.

Перемещения от сосредоточенных воздействий определяются из первого уравнения системы.

От распределенных воздействий подвесок перемещения находят-ся путем интегрирования уравнения изгиба оси балки по участкам. Для этого надо предварительно вычислить ординаты прогибов на границах участков и в общем виде выразить уравнения прогибов участков.

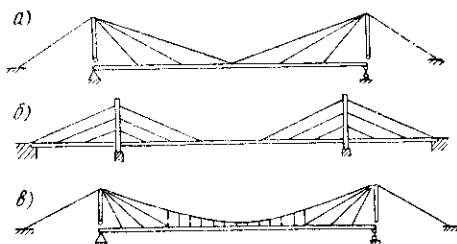
Удлинение вант, кабеля и оттяжек в перемещениях  $\delta_{ij}$  как в ко-эффициентах канонических уравнений может быть найдено по тем же формулам, что и для обычного способа расчета по методу отвер-дения.

Для систем с восходящими вантами переменность распора в ка-беле может быть учтена по той же методике, как и для схем с нисхо-дящими вантами.

#### 4. Системы с переменным коэффициентом деформативности по длине пролета

Расчет однокабельной системы со ступен-чатым изменением сечения по длине балки. Для таких конструкций используется методика расчета систем с пе-ременным коэффициентом деформативности, если принять, что ван-ты отсутствуют ( $E_B F_B = 0$ ).

**Рис. 26. Вантовые схемы**  
*a* — радиально-вантовая схема «пу-чок»; *б* — «арфа»; *в* — вантово-висячая система



Расчет радиально-вантовых систем без па-раболического кабеля (рис. 26, *a*, *б*) [28]. Приняв  $E_K F_K = 0$ , выполняют расчет способом, который дан в п. 2. В от-личие от висячих систем с кабелем, здесь в некоторых панелях балки может возникнуть сжатие. Переходные матрицы на этих участках содержат не гиперболические функции, а тригонометрические, и составляются они по методике, изложенной в главе II для систем с гибкими арками.

Расчет вантово-висячих систем. Висячие ком-бинированные системы, в которых вблизи опор подвески заменены радиальными нисходящими вантами, назовем вантово-висячими (рис. 26, *в*). Расчет таких схем с учетом геометрической нелиней-ности производится так же, как и расчет других систем с пере-менным по длине пролета коэффициентом деформативности. Такая

схема на крайних участках рассматривается как вантовая с учетом осевых сил, передаваемых на балку от вант, а на среднем участке — как висячая система с вертикальными подвесками и дополнительным усилием, приложенным по оси балки от вант.

В зависимости от количества вант и требований к точности расчета число расчетных участков, на которых изменяется осевая сила, может быть принято различным, но с увеличением числа участков увеличивается точность и трудоемкость решения задачи.

## 5. Расчет вантовых систем с треугольной решеткой

Вантовые комбинированные системы с треугольной решеткой по характеру взаимодействия балки с фермой могут быть двух видов:

а) схемы, в которых балка подвешена к двухъярусной вантовой ферме. От фермы на балку в такой схеме передаются лишь вертикальные усилия (см. рис. 2, д);

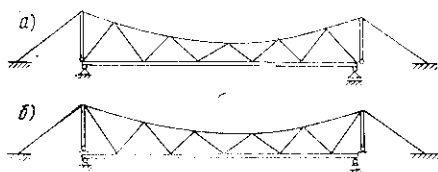


Рис. 27. Вантовые системы с треугольной решеткой

а — с восходящими опорными раскосами; б — с нисходящими

б) комбинированные системы с верхним гибким поясом и нижним жестким (балка или арка) (рис. 27). На жесткий элемент кроме вертикального воздействия передаются горизонтальные, осевые [23, 47].

Первый вид системы с наклонными подвесками имеет некоторые преимущества в монтаже — балку подвешивают к неизменяемой предварительно напряженной ферме, а не к гибкой цепи, как во втором случае. Однако по рас-

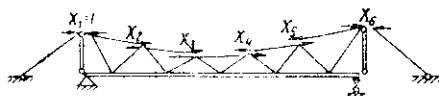


Рис. 28. Основная статически определяемая система для расчета вантовой схемы

ходу тросов первая схема менее экономична, чем вторая. В ряде случаев устройство постоянного оттяжного троса с собственными анкерами трудноосуществимо. Поэтому могут быть рекомендованы конструкции с наклонными подвесками, как первого, так и второго вида; они могут применяться в различных случаях в зависимости от условий возведения и эксплуатации сооружения.

Основная особенность расчета конструкций с наклонными подвесками — переменность расчетной схемы при загрузении временной нагрузкой части пролета. Поэтому на первой стадии расчета необходимо установить «рабочую схему» при данном загрузении, т. е. выявить, какие подвески выключились из работы вследствие сжатия.

Н. Н. Стрелецкий предложил [52] находить рабочую схему приближенно в предположении, что балка имеет полные шарниры в местах прикрепления подвесок. Это допущение позволяет простей-

шими способами, построив диаграмму Кремоны, установить рабочую схему.

Вторая стадия расчета — выбор величины предварительного натяжения элементов системы. Величина запаса растяжения раскосов может быть минимальной — 10—20%.

Третья стадия — проверочный расчет системы в эксплуатационном состоянии при действии временной нагрузки — производится матричным методом без учета геометрической нелинейности.

На этой стадии проверяют принятые рабочие схемы, степень предварительного натяжения раскосов, принятые сечения элементов, прогибы системы и изгибающие моменты в балке, определяют осевые усилия в балке (рис. 28). Уравнение

$$\mathbf{AX} - \Delta_p = 0 \quad (4.34)$$

решается обращением матрицы  $\mathbf{A}$  системы и умножением ее на столбец грузовых членов:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1} \Delta_p, \quad (4.35)$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\phi + \mathbf{A}_\sigma; \quad (4.36)$$

здесь  $\mathbf{A}_\phi$  — матрица перемещений фермы,

$$\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{S}'\mathbf{G}\mathbf{S}, \quad (4.37)$$

где  $\mathbf{S}$  — матрица усилий в элементах фермы;

$\mathbf{G}$  — матрица жесткостей элементов фермы;

$\mathbf{S}'$  — транспонированная матрица  $\mathbf{S}$ ;

$\mathbf{A}_\sigma$  — матрица перемещений балки; члены ее определяются либо с помощью упругих грузов [48], либо с помощью функций влияния при  $r = 0$  (без учета прогибов).

Усилия в стержнях и моменты в балке определяются по формулам:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}\mathbf{X}\bar{\mathbf{P}}; \quad (4.38)$$

$$\mathbf{M}_0 = (\bar{\mathbf{m}}\mathbf{E} - \mathbf{m}\mathbf{X})\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{L}_m\bar{\mathbf{P}}, \quad (4.39)$$

где  $\bar{\mathbf{m}}\mathbf{L}_m$  — матрицы влияния моментов в балке от единичных сил и от нагрузки  $\mathbf{P}$ ;

$\bar{\mathbf{P}}$  — вектор внешних сил.

Геометрическую нелинейность можно учесть путем уточнения матрицы перемещений  $\mathbf{A}_\sigma$ . При этом возможны два способа расчета:

а) приближенный — основан на допущении, что коэффициент деформативности и распор от временной нагрузки по длине пролета не изменяются. Распор  $H_p$  принимается как горизонтальная проекция усилия в боковой (берговой) оттяжке. Распор от постоянной нагрузки вычисляется по формуле (2.1). Для определения перемещений балки используются функции влияния  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  (см. прило-

жение) и расчетные формулы, которые нами приведены для расчета систем, усиленных вантами;

б) уточненный расчет производится с учетом ступенчатого изменения коэффициента деформативности по длине пролета. На каждом участке принимается

$$r_i = l_i \sqrt{\frac{H_q + H_{p_i} + N_i}{EI_i}}; \quad (4.40)$$

здесь  $l_i, EI_i$  — длина и жесткость  $i$ -того участка;

$H_{p_i}, N_i$  — распор в кабеле и осевое усилие в балке от временной нагрузки на  $i$ -том участке.

Сжатие в балке принимается в формуле (4.40) со знаком минус. Эффективность учета геометрической нелинейности при расчете висячих комбинированных систем с треугольной решеткой зависит от величины коэффициента деформативности. Следует учитывать нелинейность при расчете конструкций, у которых  $r \geq 4$ .

Как показали исследования схем с треугольной решеткой [23, 47, 52], эти комбинированные системы наиболее жестки из всех висячих конструкций и, как правило, не испытывают s-образного изгиба балки. Однако при проектировании таких систем следует учитывать некоторые их особенности: высота пилона здесь должна быть больше, чем в схемах с вертикальными подвесками, так как между кабелем и балкой в середине пролета должно быть расстояние ( $1/4 - 1/5$ )  $f$ , обеспечивающее устройство раскосов фермы. Следствие этого — удлинение оттяжек по сравнению с обычной схемой и увеличение прогибов в середине пролета. Вторая особенность рассматриваемых схем — сдвигающие усилия в узлах прикрепления подвесок к кабелю. Для восприятия этих усилий рационально ввести так называемый дистанционный кабель, который располагается параллельно основному кабелю, и, прерываясь в каждом узле, обеспечивает неподвижность узлов [21].

## 6. К сопоставлению систем повышенной жесткости

Экономическое сопоставление разнообразных висячих систем может быть выполнено на основании тщательного изучения экономики изготовления, монтажа, затрат материалов и особенностей эксплуатации сооружения. В настоящее время достаточных сведений по этим вопросам еще нет; поэтому при выборе вариантов обычно сопоставляются расходы материалов на несущие конструкции, а также величины прогибов при действии временной нагрузки как показатель эксплуатационных качеств сооружения.

Анализируя расчет рассматриваемых здесь систем, можно утверждать, что прогибы в середине пролета (упругие прогибы) почти не зависят от схемы висячей фермы. Они являются следствием деформаций кабеля по закону Гука и зависят главным образом от расчетных сопротивлений материала и стрелы провеса кабеля, от соот-

ношения нагрузок. Кинематические перемещения (прогибы в четверти пролета) зависят в основном от схемы конструкции. В главе I нами показано, что основное значение в уменьшении кинематических перемещений имеет наложение связей, препятствующих горизонтальным перемещениям кабеля вдоль пролета. Исследования выявили решающее значение любой первой связи, наложенной на гибкую нить (жесткого узла в середине пролета, соединяющего кабель с балкой, ванты, раскоса). Последующее увеличение числа связей приводит к незначительному уменьшению кинематических перемещений. Поэтому при выборе способов стабилизации системы «нить — балка» следует придерживаться экономного использования средств усиления, не допуская излишнего дублирования элементов и усложнения узлов конструкции. С точки зрения увеличения жесткости представленные здесь схемы почти равноценны; можно считать, что их эффективность возрастает в той последовательности, которая была принята нами при рассмотрении систем в книге.

Определяющими факторами при выборе той или иной схемы должны быть детально изученные в каждом отдельном случае местные условия изготовления и монтажа сооружения, эстетические и эксплуатационные требования.

В отдельную группу могут быть выделены малоэффективные способы уменьшения кинематических перемещений, которые хотя и приводят к уменьшению  $s$ -образного изгиба, но применение их связано с большими затратами средств. К ним относятся: повышение жесткости балки, увеличение постоянной нагрузки, уменьшение стрелы провеса кабеля по сравнению с оптимальной, введение направляющего (нижнего) пояса с вертикальными подвесками без жесткой горизонтальной связи его с балкой. Не отвергая полностью эти способы повышения жесткости, применять их следует при достаточном экономическом обосновании вариантов.

В качестве критерия оптимальности компоновочных параметров системы, особенно при определении стрелы провеса кабеля, может быть принято условие равенства прогибов в середине пролета при полном нагружении временной нагрузкой и в четверти при нагружении половины пролета.

## **7. Эффективность расчета висячих комбинированных систем по деформированной схеме**

Прогибы внешнераспорных висячих конструкций в процессе нагружения приводят к существенным изменениям в распределении внутренних усилий в системе и к изменениям расчетных деформаций. Следовательно, расчет таких систем при  $r \gg 2$  должен производиться по деформированной схеме. Эффективность нелинейного расчета может быть оценена сопоставлением результатов расчета с учетом прогибов и по методу отвердения. Такое сопоставление нами проделано для расчетных нагружений пролета различных висячих комбинированных конструкций независимо от длин пролетов и ве-

личин нагрузок. Основные характеристики, которые изменялись при вычислении отношений прогибов и изгибающих моментов — коэффициент деформативности и характеристика продольных деформаций

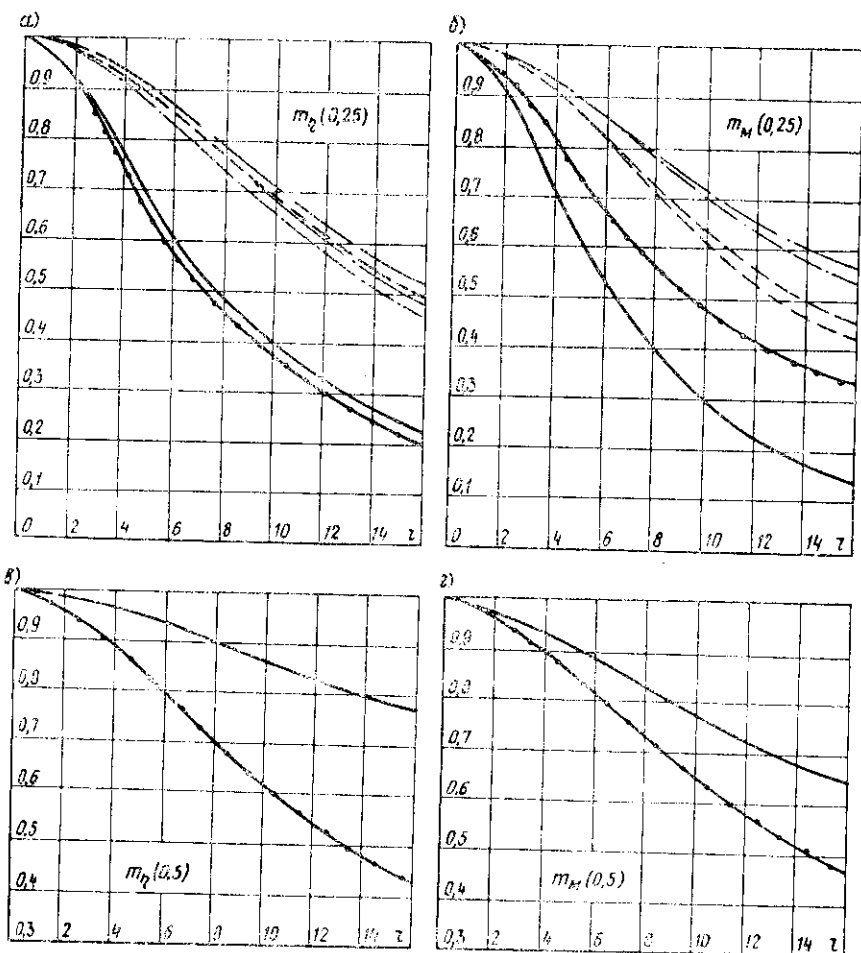


Рис. 29. Поправочные коэффициенты для приближенного учета геометрической нелинейности висячих систем повышенной жесткости

*a* — к прогибу в четверти пролета; *б* — к изгибающему моменту в четверти пролета; *в* — к прогибу в середине пролета; *г* — к изгибающему моменту в середине пролета. Обозначения: ————— обычная система, распределенная нагрузка; - · - · - то же, одиночный груз; ————— система с жестким средним узлом, распределенная нагрузка; - · - · - то же, одиночный груз; ————— двухкабельная схема со средней подвеской, распределенная нагрузка, —····— то же, одиночный груз

$n_1$ . Для сложных систем принимались наиболее распространенные значения компоновочных параметров. Результаты вычислений представлены на рис. 29, где  $m$  может рассматриваться как поправочный коэффициент к линейному расчету, учитывающий уменьшение про-



гибов (или изгибающих моментов) за счет деформативности конструкции. Так, например, поправочный коэффициент для изгибающих моментов нами вычислялся по формуле

$$m_m = \frac{\Phi_1''(x, \xi) - \alpha(\xi) \Phi_2''(x)}{\Phi_1''(x, \xi) - \alpha_0(\xi) \Phi_2''(x)}, \quad (4.41)$$

где функции, отмеченные нулем, найдены при  $r = 0$ .

По графикам коэффициентов  $m$  можно судить о том, как велики поправки, которые вводятся в результаты за счет нелинейности висячих комбинированных систем в зависимости от коэффициента деформативности  $r$ .

Выразим коэффициент деформативности через компоновочные параметры, которые определяются заданием или принимаются в процессе проектирования сооружения. Используем для этой цели расчет по методу отвердения и приближенные зависимости, принятые на первой стадии компоновочных расчетов (см. гл. I). Формула коэффициента деформативности в этом случае может быть представлена в следующем виде:

а) при нагружении всего пролета в случае, если балка рассчитывается по прочности:

$$r = 4 \sqrt{\frac{p+q}{p} \cdot \frac{R}{E} \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{l}{h_0}}; \quad (4.42)$$

б) то же, при нагружении половины пролета:

$$r = 4 \sqrt{\frac{q+0,5p}{p} \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{l}{h_0} \cdot \frac{R}{E}}; \quad (4.43)$$

в) при нагружении всего пролета в случае, если балка рассчитывается по деформациям:

$$r = 16 \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{p+q}{p''} \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{\Delta y}{l}}; \quad (4.44)$$

г) то же, при нагружении половины пролета:

$$r = 16 \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{q+0,5p}{p''} \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{\Delta y}{l}}. \quad (4.45)$$

Из формул (4.42)—(4.45) и рис. 29 следует, что эффективность расчета по нелинейной схеме увеличивается:

а) при увеличении отношения  $\frac{q}{p}$  — постоянной нагрузки к временной, т. е. расчет конструкций, имеющих железобетонный настил или другую большую постоянную нагрузку, должен производиться с учетом прогибов;

б) с уменьшением относительной стрелы провеса кабеля  $f/l$ , т. е. системы с палогими стрелами, необходимо также рассчитывать с учетом геометрической нелинейности;

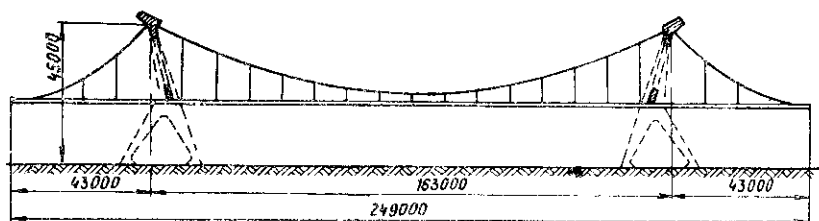


Рис. 30. Бумажная фабрика в Мантуе (Италия, арх. П. Нерви) [26]

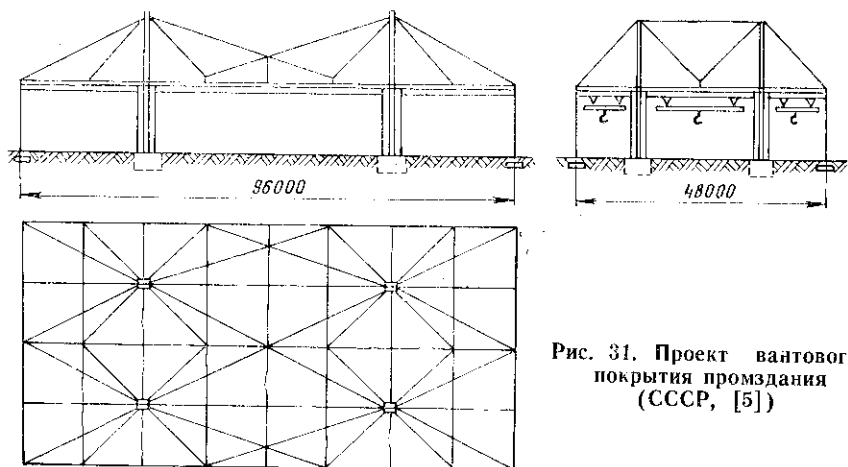


Рис. 31. Проект вантового покрытия промздания (СССР, [5])

в) при увеличении предельных (допустимых) прогибов  $\Delta y/l$ . Как известно, увеличение прогибов связано с применением высокопрочных материалов для несущих питей;

г) при уменьшении высоты балки  $h_6/l$  — расчет с учетом геометрической нелинейности систем со сплошными балками будет эффективнее, чем расчет висячих конструкций с элементом жесткости в виде сквозных ферм;

д) с повышением прочности материала балки  $R$  или с уменьшением его модуля упругости  $E$ . Из этого следует, что расширение применения новых высокопрочных сталей, алюминия и пластмасс для балок комбинированных конструкций должно сопровождаться уточнением методов их расчета.

Как видно из формул (4.42) — (4.45), в выражение коэффициента деформативности не входит величина пролета; однако влияние пролета на коэффициент деформативности проявляется через другие величины.

Как известно, с увеличением пролета возрастает отношение  $q/p$ . Кроме этого, проектировщики по производственным и эстетическим соображениям в сооружениях больших пролетов стремятся уменьшить относительную стрелу провеса кабеля  $f/l$  и высоту балки  $h_6/l$ .

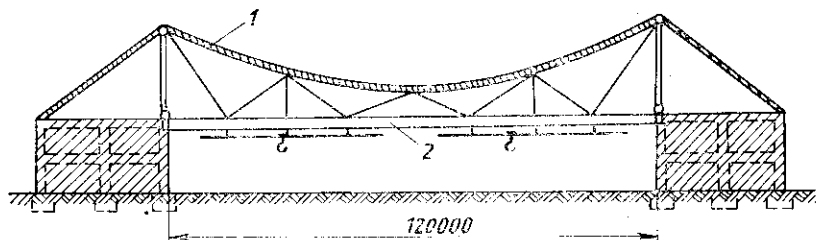


Рис. 32. Проект цеха для ремонта самолетов. Передача распора на каркасы вспомогательных цехов (проект инж. Д. М. Цицилина)

1 — настилы — железобетонные плиты; 2 — двутавровая балка

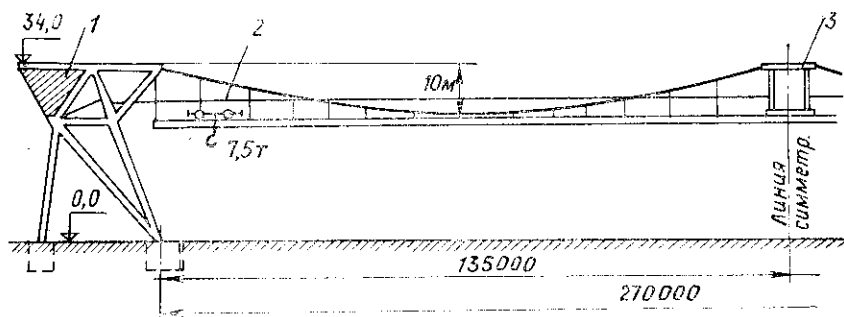


Рис. 33. Ангар для ремонта самолетов «Боинг-747» во Франкфурте-на-Майне (ФРГ)

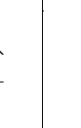
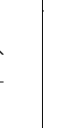
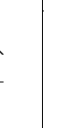
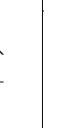
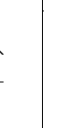
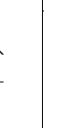
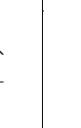
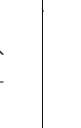
1 — контрбрус; 2 — натягающая ванна; 3 — ригель рамы пролетом 100 м





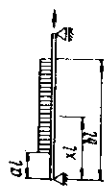
Все это приводит к увеличению коэффициента деформативности с увеличением пролета, а следовательно, к увеличению эффективности деформационного расчета.

Величина предельных прогибов связана с эксплуатационными требованиями к конструкции. С этой точки зрения временные мосты малых пролетов, для которых допускаются большие прогибы при малой скорости передвижения грузов, необходимо рассчитывать с учетом геометрической нелинейности.

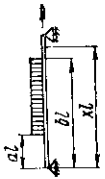
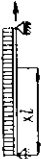
Из графиков поправочных коэффициентов можно заметить, что при расчете на местную нагрузку (загружение половины пролета распределенной нагрузкой или загружение одиночным грузом) нелинейность имеет большее значение, чем при нагружении всего пролета. Следовательно, геометрическая нелинейность связана с кинематическими перемещениями. Если сооружение испытывает небольшие кинематические перемещения, нелинейный расчет его не даст больших поправок к расчету по линейной схеме. Последнее подтверждается расчетом вантовых схем, где наблюдаются в основном упругие удлинения элементов.

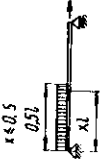
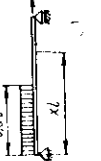
Некоторые примеры применения комбинированных висячих конструкций повышенной жесткости в зданиях и сооружениях приведены на рис. 30—33.

№	Обозначение	Схема нагружения	Расчет по методу отгвждения, $r=0$	С учетом геометрической нелинейности
1	$\frac{\xi}{x} \Phi_1(x, \xi)$		$\frac{1}{6} \xi (1-x) (2x-x^2-\xi^2)$	$\frac{1}{r^3} \left[ r \xi (1-x) \frac{\text{sh } r \xi}{\text{sh } r} - \frac{\text{sh } r \xi}{\text{sh } r} \text{sh } r (1-x) \right]$
2	$\Phi_1'(x, \xi)$		$\frac{1}{6} \xi (\xi^2 + 3x^2 - 6x + 2)$	$\frac{1}{r^2} \left[ -\xi + \frac{\text{sh } r \xi}{\text{sh } r} \text{ch } r (1-x) \right]$
3	$\Phi_1''(x, \xi)$		$-\xi (1-x)$	$-\frac{\text{sh } r \xi}{r \text{sh } r} \text{sh } r (1-x)$
4	$\Phi_1'''(x, \xi)$		$\xi$	$\frac{\text{sh } r \xi}{\text{sh } r} \text{ch } r (1-x)$
5	$\frac{\xi}{x} \Phi_1(x, \xi)$		$\frac{1}{6} x (1-\xi) (2\xi - \xi^2 - x^2)$	$\frac{1}{r^3} \left[ r x (1-\xi) \frac{\text{sh } r x}{\text{sh } r} - \frac{\text{sh } r x}{\text{sh } r} \text{sh } r (1-\xi) \right]$
6	$\Phi_1'(x, \xi)$		$\frac{1}{6} (1-\xi) (2\xi - \xi^2 - 3x^2)$	$\frac{1}{r^2} \left[ 1 - \xi - \frac{\text{ch } r x}{\text{sh } r} \text{sh } r (1-\xi) \right]$
7	$\Phi_1''(x, \xi)$		$-x (1-\xi)$	$-\frac{\text{sh } r x}{r \text{sh } r} \text{sh } r (1-\xi)$
8	$\Phi_1'''(x, \xi)$		$\xi - 1$	$-\frac{\text{ch } r x}{\text{sh } r} \text{sh } r (1-\xi)$

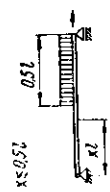
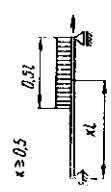
№	Обозначение	Схема нагружения	Расчет по методу отвердения, $r=0$	С учетом геометрической нелинейности
9	$b \int_a^b \bar{\Phi}_1 d\xi$		$\frac{1}{24} \{ [b^2(2-b)^2 - a^2(2-a)^2] x + [2a(2-a) - 2b(2-b)] x^3 \}$	$\frac{1}{r^3} \left\{ \frac{1}{2} (a-b)(a+b-2) rx - \frac{\text{sh } rx}{r \text{sh } r} [\text{ch } r(1-a) - \text{ch } r(1-b)] \right\}$
10	$b \int_a^b \bar{\Phi}_1'' d\xi$		$\frac{1}{24} \{ b^3(2-b)^3 - a^3(2-a)^3 + 3[2a(2-a) - 2b(2-b)] x^2 \}$	$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} (a-b)(a+b-2) - \frac{\text{ch } rx}{r \text{sh } r} [\text{ch } r(1-a) - \text{ch } r(1-b)] \right\}$
11	$b \int_a^b \bar{\Phi}_1''' d\xi$		$\frac{1}{2} [a(2-a) - b(2-b)] x$	$-\frac{\text{sh } rx}{r^2 \text{sh } r} [\text{ch } r(1-a) - \text{ch } r(1-b)]$
12	$b \int_a^b \bar{\Phi}_1'''' d\xi$		$\frac{1}{2} [a(2-a) - b(2-b)]$	$-\frac{\text{ch } rx}{r \text{sh } r} [\text{ch } r(1-a) - \text{ch } r(1-b)]$
13	$b \int_a^b \Phi_1 d\xi$		$\frac{1}{24} [x^4 + 2(b^2 - 2b - a^2)x^3 + 6a^2x^2 + (a^4 - 4a^2 + 4b^2 - 4b^3 + b^4)x + a^4]$	$\frac{1}{r^3} \left\{ \frac{rx}{2} (1-x) - \frac{r}{2} [a^2(1-x) + (1-b)^2x] - \frac{1}{r \text{sh } r} [\text{ch } ra \text{sh } r(1-x) + \text{sh } rx \text{ch } r(1-b)] - \frac{1}{r} \right\}$

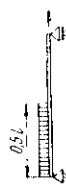
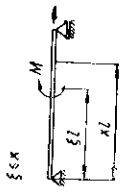
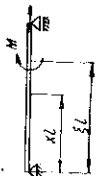
№	Обозначение	Схема нагружения	Расчет по методу отвердения, $r=0$	С учетом геометрической нелинейности
14	$b \int_a^b \Phi_1' d\xi$		$\frac{1}{12} \left[ 2x^3 + 3(b^2 - 2b - a^2)x^2 + 6a^2x + 2b^2 + \frac{1}{2}b^4 - 2b^3 + 2a^2 + \frac{a^4}{2} \right]$	$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} [(1-b)^2 - a^2] - \frac{1}{r \operatorname{sh} r} [\operatorname{ch} ra \operatorname{ch} r(1-x) - \operatorname{ch} rx \operatorname{ch} r(1-b)] \right\}$
15	$b \int_a^b \Phi_1'' d\xi$		$\frac{1}{2} [x^2 + (b^2 - 2b - a^2)x + a^2]$	$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sh} r} [\operatorname{ch} ra \operatorname{sh} r(1-x) - \operatorname{sh} rx \operatorname{ch} r(1-b)]$
16	$b \int_a^b \Phi_1''' d\xi$		$\frac{1}{2} (b^2 - 2b - a^2) + x$	$-\frac{1}{r \operatorname{sh} r} [\operatorname{ch} ra \operatorname{ch} r(1-x) - \operatorname{ch} rx \operatorname{ch} r(1-b)]$
17	$b \int_a^b \overline{\Phi}_1 d\xi$		$\frac{1}{24} \{ [b^2(4+b^2) - a^2(4+a^2)]x + 6(a^2 - b^2)x^2 + 2(b^2 - a^2)x^3 + a^4 - b^4 \}$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{r}{2} (b^2 - a^2)(1-x) - \frac{\operatorname{sh} r(1-x)}{r \operatorname{sh} r} (\operatorname{ch} rb - \operatorname{ch} ra) \right]$
18	$b \int_a^b \overline{\Phi}_1' d\xi$		$\frac{1}{24} [b^2(4+b^2) - a^2(4+a^2)] + 12(a^2 - b^2)x + 6(b^2 - a^2)x^2$	$\frac{1}{2r^3} (a^2 - b^2) + \frac{\operatorname{ch} r(1-x)}{r^3 \operatorname{sh} r} (\operatorname{ch} rb - \operatorname{ch} ra) - \operatorname{ch} ra$



№	Обозначение	Схема нагружения	Расчет по методу отвердения, $r=0$	С учетом геометрической нелинейности
19	$\int_a^b \overline{\Phi}_1'' d\xi$		$\frac{1}{2} (a^2 - b^2) (1-x)$	$-\frac{\text{sh } r(1-x)}{r^2 \text{ sh } r} (\text{ch } rb - \text{ch } ra)$
20	$\int_a^b \overline{\Phi}_1''' d\xi$		$\frac{1}{2} (b^2 - a^2)$	$\frac{\text{ch } r(1-x)}{r \text{ sh } r} (\text{ch } rb - \text{ch } ra)$
21	$\Phi_2(x)$		$\frac{1}{24} (x - 2x^3 + x^4)$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{rx}{2} (1-x) + \frac{\text{ch } r(\frac{1}{2}-x)}{r \text{ ch } \frac{r}{2}} - \frac{1}{r} \right]$
22	$\Phi_2'(x)$		$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} - 3x^2 + 2x^3 \right)$	$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{2} - x - \frac{\text{sh } r(\frac{1}{2}-x)}{r \text{ ch } \frac{r}{2}} \right]$
23	$\Phi_2''(x)$		$-\frac{x}{2} (1-x)$	$-\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\text{ch } r(\frac{1}{2}-x)}{r^2 \text{ ch } \frac{r}{2}} \right]$
24	$\Phi_2'''(x)$		$-\frac{1}{2} + x$	$-\frac{\text{sh } r(\frac{1}{2}-x)}{r \text{ ch } \frac{r}{2}}$
25	$\Phi_3$		$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{r}{12} + \frac{2 \text{th } \frac{r}{2}}{r^2} - \frac{1}{r} \right]$

№	Обозначение	Схема нагружения	Расчет по методу отвердения, $r=0$	С учетом геометрической нелинейности	
26	$\bar{\Phi}_4(x)$		$\frac{1}{48} \left( \frac{9}{8} x - 3x^3 + 2x^4 \right)$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{r}{4} - x \right) - \frac{\text{sh } rx}{r \text{ sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right) + \frac{\text{ch } rx - 1}{r} \right]$	
27	$\bar{\Phi}'_4(x)$			$\frac{1}{16} \left( \frac{3}{8} - 3x^2 + \frac{8}{3} x^3 \right)$	$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{3}{8} - x - \frac{\text{ch } rx}{r \text{ sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right) + \frac{\text{sh } rx}{r} \right]$
28	$\bar{\Phi}''_4(x)$			$\frac{1}{8} (-3x + 4x^2)$	$-\frac{1}{r^2} - \frac{\text{sh } rx}{r^2 \text{ sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right) + \frac{\text{ch } rx}{r^2}$
29	$\bar{\Phi}''''_4(x)$			$-\frac{3}{8} + x$	$\frac{\text{sh } rx}{r} - \frac{\text{ch } rx}{r \text{ sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right)$
30	$\bar{\bar{\Phi}}_4(x)$				$\frac{1}{48} \left[ \frac{7}{8} (1-x) - (1-x)^3 \right]$
31	$\bar{\bar{\Phi}}'_4(x)$	$\frac{1}{16} \left[ (1-x)^2 - \frac{7}{24} \right]$	$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\text{ch } r(1-x)}{r \text{ sh } r} \left( \text{ch } \frac{r}{2} - 1 \right) - \frac{1}{8} \right]$		
32	$\bar{\bar{\Phi}}''_4(x)$	$-\frac{1-x}{8}$	$\frac{\text{sh } r(1-x)}{r^2 \text{ sh } r} \left( 1 - \text{ch } \frac{r}{2} \right)$		
33	$\bar{\bar{\Phi}}''''_4(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{\text{ch } r(1-x)}{r \text{ sh } r} \left( \text{ch } \frac{r}{2} - 1 \right)$		



№	Обозначение	Схема нагружения	Расчет по методу отгвердения, $r=0$	С учетом геометрической нелинейности
34	$\bar{\Phi}_5(x)$	 <p><math>x \leq 0.5l</math></p>	$\frac{1}{48} \left( \frac{7}{8} x - x^3 \right)$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{rx}{8} + \frac{\text{sh } rx}{r \text{sh } r} \left( 1 - \text{ch } \frac{r}{2} \right) \right]$
35	$\bar{\Phi}'_5(x)$		$\frac{1}{16} \left( \frac{7}{24} - x^2 \right)$	$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{8} + \frac{\text{ch } rx}{r \text{sh } r} \left( 1 - \text{ch } \frac{r}{2} \right) \right]$
36	$\bar{\Phi}''_5(x)$		$-\frac{x}{8}$	$\frac{\text{sh } rx}{r^2 \text{sh } r} \left( 1 - \text{ch } \frac{r}{2} \right)$
37	$\bar{\Phi}'''_5(x)$		$-\frac{1}{8}$	$\frac{\text{ch } rx}{r \text{sh } r} \left( 1 - \text{ch } \frac{r}{2} \right)$
38	$\bar{\Phi}_5(x)$	 <p><math>x \geq 0.5l</math></p>	$\frac{1}{48} \left[ \frac{9}{8} (1-x) - 3(1-x)^3 + 2(1-x)^2 \right]$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{r}{8} (5x-1) - \frac{rx^2}{2} - \frac{\text{sh } r(1-x)}{r \text{sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right) + \frac{\text{ch } r(1-x) - 1}{r} \right]$
39	$\bar{\Phi}'_5(x)$		$-\frac{1}{16} \left[ \frac{3}{8} - 3(1-x)^2 + \frac{8}{3}(1-x)^3 \right]$	$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{5}{8} - rx + \frac{\text{ch } r(1-x)}{r \text{sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right) - \frac{\text{sh } r(1-x)}{r} \right]$
40	$\bar{\Phi}''_5(x)$		$\frac{1}{8} \left[ 4(1-x)^2 - 3(1-x) \right]$	$-\frac{1}{r} \frac{\text{sh } r(1-x)}{r^2 \text{sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right) + \frac{\text{ch } r(1-x)}{r^2}$
41	$\bar{\Phi}'''_5(x)$		$\frac{5}{8} - x$	$\frac{\text{ch } r(1-x)}{r \text{sh } r} \left( \text{ch } r - \text{ch } \frac{r}{2} \right) - \frac{\text{sh } r(1-x)}{r}$

№	Обозначение	Схема загрузки	Расчет по методу отворщения, $r=0$	С учетом геометрической нелинейности
42	$\Phi_6$		$\frac{17}{7680}$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{5r}{192} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{r^2} \operatorname{sh} r \left( \operatorname{ch}^2 \frac{r}{2} + \operatorname{ch} r - 2 \operatorname{ch} \frac{r}{2} \right) \right]$
43	$\Phi_7$		$\frac{15}{7680}$	$\frac{1}{r^3} \left[ \frac{r}{64} - \frac{1}{r^2} \operatorname{sh} r \left( \operatorname{ch} \frac{r}{2} - 1 \right)^2 \right]$
44	$\bar{\Phi}_M$		$-\frac{1}{6} \left[ 3\xi^2 - 3\xi^2 x - 2x + 3x^2 - x^3 \right]$	$-\frac{1}{r^2} \left[ 1 - x - \frac{\operatorname{sh} r(1-x)}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r \xi \right]$
45	$\bar{\Phi}'_M$		$-\frac{1}{2} \left[ 2x - \xi^2 - \frac{2}{3} - x^2 \right]$	$-\frac{1}{r} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{\operatorname{ch} r(1-x)}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r \xi \right]$
46	$\bar{\Phi}''_M$		$1 - x$	$-\frac{\operatorname{sh} r(1-x)}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r \xi$
47	$\bar{\Phi}'''_M$		$-1$	$+ \frac{r \operatorname{ch} r(1-x)}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r \xi$
48	$\bar{\Phi}_M$		$-\frac{1}{6} \left[ 6\xi^2 x - 3\xi^2 x - 2x - x^3 \right]$	$-\frac{1}{r^2} \left[ x - \frac{\operatorname{sh} r x}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r(1-\xi) \right]$
49	$\bar{\Phi}'_M$		$-\frac{1}{2} \left[ 2\xi - \xi^2 - \frac{2}{3} - x^2 \right]$	$-\frac{1}{r} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{\operatorname{ch} r x}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r(1-\xi) \right]$
50	$\bar{\Phi}''_M$		$+x$	$+ \frac{\operatorname{sh} r x}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r(1-\xi)$
51	$\bar{\Phi}'''_M$		$+1$	$+ \frac{r \operatorname{ch} r x}{\operatorname{sh} r} \operatorname{ch} r(1-\xi)$

№	Обозначение	Схема нагружения	Расчет по методу ствердения, $r = 0$	С учетом геометрической нелинейности
52	$\Phi_{M_1}$		$-\frac{1}{6}(x-x^3)$	$-\frac{1}{r^2} \left( x - \frac{\operatorname{sh} r x}{\operatorname{sh} r} \right)$
53	$\Phi'_{M_1}$		$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - x^2 \right)$	$-\frac{1}{r^2} \frac{\operatorname{ch} r x}{\operatorname{sh} r} + \frac{\operatorname{ch} r x}{r \operatorname{sh} r}$
54	$\Phi''_{M_1}$		$+x$	$+\frac{\operatorname{sh} r x}{\operatorname{sh} r}$
55	$\Phi'''_{M_1}$		$+1$	$+\frac{r \operatorname{ch} r x}{\operatorname{sh} r}$
56	$\Phi_{M_0}$		$+\frac{x}{6}(1-x)(2-x)$	$-\frac{1}{r^3} \left[ 1 - x - \frac{\operatorname{sh} r(1-x)}{\operatorname{sh} r} \right]$
57	$\Phi'_{M_0}$		$\frac{1}{2} \left( 2x - \frac{2}{3} - x^2 \right)$	$-\frac{1}{r^2} \frac{\operatorname{ch} r(1-x)}{r \operatorname{sh} r} + \frac{\operatorname{ch} r(1-x)}{r \operatorname{sh} r}$
58	$\Phi''_{M_0}$		$-(1-x)$	$\frac{\operatorname{sh} r(1-x)}{\operatorname{sh} r}$
59	$\Phi'''_{M_0}$		$-1$	$-\frac{r \operatorname{ch} r(1-x)}{\operatorname{sh} r}$