Ответы

№	c_{min}	$\mathcal{C}$	№	c_{min}	$\mathcal{C}$	№	c_{min}	$\mathcal{C}$
9.1	10	23	9.4	12	2	9.7	12	14
9.2	12	9	9.5	12	23	9.8	12	18
9.3	11	12	9.6	11	17	9.9	12	12

3.1.2. Пример. *Найти наименьший вес вершин дерева (рис. 21) и его центроид.*

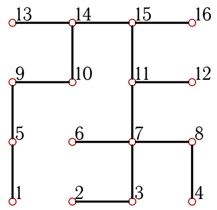


Рис. 21

Решение

Очевидно, вес каждой висячей вершины дерева порядка n равен $n-1$. Висячие вершины не могут составить центроид дерева, поэтому исключим из рассмотрения вершины 1, 2, 4, 6, 12, 13 и 16. Для всех остальных вершин найдем их вес, вычисляя длины (размер) их ветвей.

Число ветвей вершины равно ее степени. Размеры ветвей вершин 3, 5 и 8 равны 1 и 14. Следовательно, веса этих вершин 14. К вершине 7 подходят четыре ветви размером 1, 2, 2 и 10. Таким образом, ее вес c_7 равен 10. Аналогично вычисляются веса других вершин: $c_9 = 13$, $c_{10} = c_{14} = 12$, $c_{11} = c_{15} = 8$. Минимальный вес вершин равен 8, поэтому центроид дерева образуют две вершины с таким весом: 11 и 15.

3.2. Десятичная кодировка

Деревья представляют собой важный вид графов. С помощью деревьев описываются базы данных, деревья моделируют алгоритмы и программы, их используют в электротехнике, химии. Одной из актуальных задач в эпоху компьютерных и телекоммуникационных сетей является задача сжатия информации. Сюда входит и кодировка деревьев. Компактная запись дерева, полностью описывающая его структуру, может существенно упростить как передачу информации о дереве, так и работу с ним. Различные виды кодировки деревьев подробно описаны в [14].

Приведем одну из простейших кодировок помеченных деревьев с выделенным корнем — десятичную.

Кодируя дерево, придерживаемся следующих правил:

1. Кодировка начинается с корня и заканчивается в корне.
2. Каждый шаг на одну дугу от корня кодируется единицей.
3. В узле выбираем направление на вершину с меньшим номером.

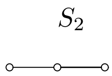
4. Достигнув висячей вершины, идем назад, кодируя каждый шаг нулем.

5. При движении назад в узле всегда выбираем направление на непройденную вершину с меньшим номером.

Кодировка в такой форме получается достаточно компактной, однако она не несет в себе информацию о номерах вершин дерева. Существуют еще аналогичные кодировки, где вместо единиц проставляются в таком же порядке номера или названия вершин.

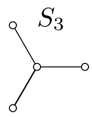
Есть деревья, для которых несложно вывести формулу десятичной кодировки. Рассмотрим, например графы-звезды, являющиеся полными двудольными графами $K_{1,n}$, одна из долей которых состоит из одной вершины. Другое обозначение звезд $K_{1,n} = S_n$.

На рис. 22-25 приведены звезды и их двоичные и десятичные кодировки. Корень дерева располагается в центральной вершине звезды. Легко получить общую формулу $Z(S_n) = 2(4^n - 1)/3$.



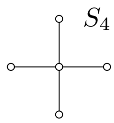
1010
10

Рис. 22



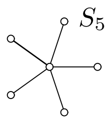
101010
42

Рис. 23



10101010
170

Рис. 24



1010101010
682

Рис. 25

Если корень поместить в любой из висячих вершин, то код Z' будет выражаться большим числом. Более того, существует зависимость $Z(S_n) - Z'(S_n) = Z(S_{n-1})$. Аналогично, рассмотрим цепи C_n, рис. 26.

В звездах только два варианта расположения корня с различными десятичными кодировками. В цепи же число вариантов растет с увеличением n. Рассмотрим самый простой вариант, расположив корень в концевой вершине (листе). Для C_2 получим десятичную кодировку 10 и двоичную 2. Точно также для других цепей: 1100 и 12, 111000 и 56, 11110000 и 240. Общая формула для десятичной кодировки цепи с корнем в концевой вершине имеет вид $Z(C_n) = 2^{n-1}(2^{n-1} - 1)$.

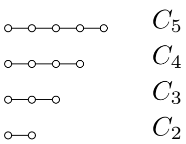
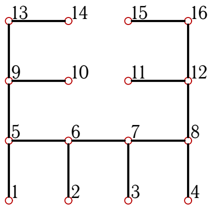


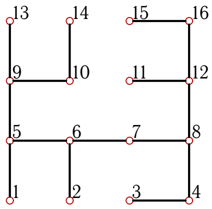
Рис. 26

3.2.1. Задачи. *Записать десятичный код дерева 10.1 – 10.9 с корнем в вершине 7.*

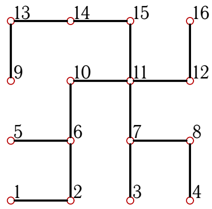
10.1.



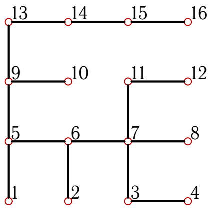
10.2.



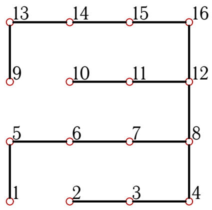
10.3.



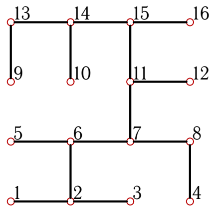
10.4.



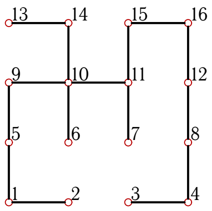
10.5.



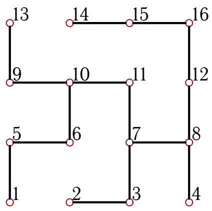
10.6.



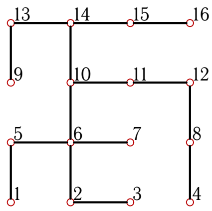
10.7.



10.8.



10.9.



Ответы

№	Код(10)	№	Код(10)	№	Код(10)
10.1	766905776	10.4	862838828	10.7	1002643328
10.2	920926640	10.5	955371392	10.8	863518256
10.3	754522592	10.6	978115976	10.9	966725216

3.2.2. Пример. *Записать десятичный код дерева (рис. 27) с корнем в вершине 3.*

Решение

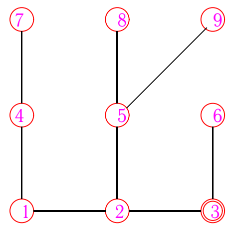


Рис. 27

На основании правила кодировки двигаясь по дереву, проставим в код единицы и нули. При движении из корня 3 к вершине 7 проходим четыре ребра. В код записываем четыре единицы: *1111*. Возвращаясь от вершины 7 к вершине 2 (до ближайшей развилки), проходим три ребра. Записываем в код три нуля: *000*. От вершины 2 к 5 и далее к 8 (меньший номер) *11*, от 8 назад к 5 и к от 5 к 9: *01*, от 9 к корню 3: *000*. И, наконец, от вершины 3 к 6 и обратно имеем: *10*.

В итоге, собирая все вместе, получим двоичный код дерева:

$$1\ 111\ 000\ 110\ 100\ 010.$$

Разбивая число на тройки, переводим полученное двоичное представление в восьмеричное [1]. Получаем 1700642_8. Это число переводим затем в десятичное $2 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^5 = 61858$.

Можно перевести двоичное число из n цифр в десятичное число непосредственно по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} k_i 2^{n-i},$$

где k_i — i -я цифра (0 или 1) в двоичном числе.

Maple-программа для десятичной кодировки приведена на с. 114.

3.3. Кодировка Прюфера

Выбор кодировки дерева зависит от решаемой теоретической или технической задачи. Среди всех различных возможных кодировок естественно отыскать оптимальные по какому-то качеству решения. Впервые проблемой оптимальности кодировки деревьев занялся А. В. Анисимов (*Об оптимальной упаковке деревьев*//Кибернетика. — 1976. № 3. — с.89-91). Было показано, что существует оптимальный в каком-то смысле код дерева. Это код Прюфера [2]. Это достаточно редко упоминаемое имя встречается в Т. 1 книги Д. Кнута [16] и в книге О. Оре [25] в связи с выводом числа n^{n-2} помеченных деревьев [3]. Наиболее полно кодировка Прюфера и действия с числами (кодами) Прюфера

[1] $000_2 = 0_8$, $001_2 = 1_8$, $010_2 = 2_8$, $011_2 = 3_8$, $100_2 = 4_8$, $101_2 = 5_8$, $110_2 = 6_8$, $111_2 = 7_8$.

[2] Prufer, Ernst Paul Heinz.

[3] Теорема Кэли (Cayley A.) (