

№	φ_1	φ_2	φ_3	τ_1	τ_2	τ_3
	рад·100			МПа		
1	-1.518	-1.533	-1.566	-50.611	-0.305	-1.663
2	-1.117	-1.263	-1.396	-34.377	-7.922	-3.820
3	0.840	4.246	4.483	29.987	68.118	7.922
4	2.565	2.710	2.743	51.307	5.093	1.320
5	3.944	5.026	4.251	73.942	21.645	-16.599
6	0.000	-1.509	-2.025	0.000	-30.180	-17.189
7	6.881	7.091	7.159	114.686	6.979	2.282
8	0.042	-0.281	-0.981	1.320	-10.756	-25.465
9	-0.047	0.070	0.274	-2.879	3.842	5.860
10	0.704	0.357	-0.203	10.563	-12.386	-20.372

3.6. Статически неопределимая задача о кручении

Постановка задачи. К сечениям $1, \dots, n$ стального вала кусочно-постоянного сечения, закрепленного по концам, приложены осевые моменты M_k , $k = 1, \dots, n$. Найти реактивные моменты в точках закрепления вала и моменты в сечениях. Построить эпюру углов поворота и касательных напряжений.

Эта статически неопределимая задача. Единственное нетривиальное уравнение статики, которое можно составить для вала под действием крутящих моментов — это уравнение моментов относительно оси вала. В это уравнение входит два неизвестных реактивных момента. Дополнительным уравнение для раскрытия статической неопределимости и решения задачи является равенство нулю угла поворота вала в опоре, освобожденной от связи — заделки.

План решения

1. Освобождаем одну из опор, заменяя ее действие на вал неизвестным реактивным моментом. Методом сечений, из условия равновесия внешних моментов и реакций опор, находим моменты на участках $1, \dots, n + 1$ как функции неизвестной реакции.
2. Вычисляем полярные моменты инерции сечений вала J_{pk} по формуле (3.1) для круглых сечений и (3.2) для кольцевых.
3. На каждом участке определяем угол закручивания правого сечения относительно левого по формуле (3.3).
4. Вычисляем абсолютные углы закручивания (3.4).
5. Из уравнения $\varphi_1 = 0$ определяем неизвестную реакцию в правой опоре.
6. С учетом найденной реакции вычисляем моменты на участках.

7. Определяем численные значения абсолютных углов закручивания (в радианах), подставляя найденную реакцию в выражения, полученные в п. 4.

8. Вычисляем касательные напряжения на участках по формуле (3.5).

Пример. Найти моменты заделок опор вала кусочно-постоянного круглого сечения (рис. 24). К валу приложены моменты $M_1 = 10$ кНм, $M_2 = 18$ кНм, $M_3 = 15$ кНм. Построить эпюры углов закручивания. Модуль сдвига материала $G = 80$ ГПа. Длины участков даны в метрах. Диаметры участков: $d_1 = 0.09$ м, $d_2 = 0.18$ м, $d_3 = 0.25$ м, $d_4 = 0.32$ м.

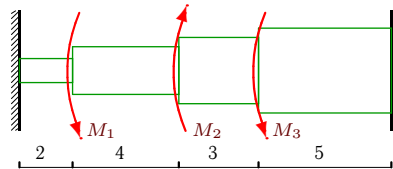


Рис. 24

Решение

1. Методом сечений, из условия равновесия внешних моментов и реакций опор, находим моменты на участках 1, 2, 3, 4. Рассматриваем равновесие правой отсеченной части (рис. 25 – 28.)

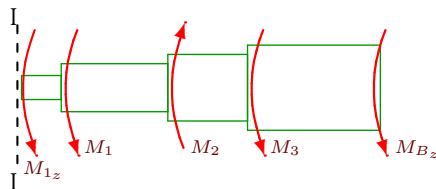


Рис. 25

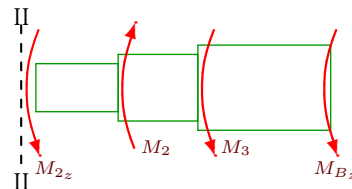


Рис. 26

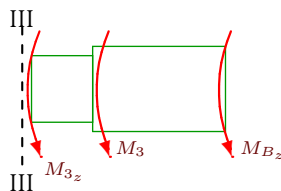


Рис. 27

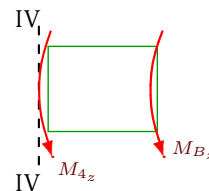


Рис. 28

Получаем

$$\begin{aligned} M_{z_1} &= -M_1 + M_2 - M_3 - M_{B_z} = -7 - M_{B_z}, \\ M_{z_2} &= M_2 - M_3 - M_{B_z} = 3 - M_{B_z}, \\ M_{z_3} &= -M_3 - M_{B_z} = -15 - M_{B_z}, \\ M_{z_4} &= -M_{B_z}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

2. Вычисляем полярные моменты инерции сечений вала J_{pk} .

$$\begin{aligned} J_{p_1} &= \pi 0.09^4 / 32 = 0.644 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4, \\ J_{p_2} &= \pi 0.18^4 / 32 = 10.306 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4, \\ J_{p_3} &= \pi 0.25^4 / 32 = 38.349 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4, \\ J_{p_4} &= \pi 0.32^4 / 32 = 102.943 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4. \end{aligned} \quad (3.12)$$

3. На каждом участке определяем угол закручивания правого сечения относительно левого.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= -(7 + M_{B_z}) \cdot l_1 / (GJ_{p_1}), \\ \tilde{\varphi}_2 &= (3 - M_{B_z}) \cdot l_2 / (GJ_{p_2}), \\ \tilde{\varphi}_3 &= -(15 + M_{B_z}) \cdot l_3 / (GJ_{p_3}), \\ \tilde{\varphi}_4 &= -M_{B_z} \cdot l_4 / (GJ_{p_4}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

4. Вычисляем абсолютные углы закручивания

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= \tilde{\varphi}_4, \\ \varphi_3 &= \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4, \\ \varphi_2 &= \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4, \\ \varphi_1 &= \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4. \end{aligned} \quad (3.14)$$

5. Из уравнения $\varphi_1 = 0$ определяем неизвестную реакцию в опоре B . Сокращая модуль сдвига G , получаем

$$-(7 + M_{B_z})l_1/J_{p_1} + (3 - M_{B_z})l_2/J_{p_2} - (15 + M_{B_z})l_3/J_{p_3} - M_{B_z}l_4/J_{p_4} = 0.$$

Подставляем значения длин и моментов инерции:

$$-21.744 - 3.619M_{B_z} = 0.$$

Получаем $M_{B_z} = -6.006$ кНм. Статическая неопределимость раскрыта.

6. С учетом найденной реакции по формулам (3.11) вычисляем моменты на участках (кНм)

$$\begin{aligned} M_{z_1} &= -7 + 6.007 = -0.993, \\ M_{z_2} &= 3 + 6.007 = 9.007, \\ M_{z_3} &= -15 + 6.007 = -8.993, \\ M_{z_4} &= 6.007. \end{aligned} \quad (3.15)$$

7. Определяем абсолютные углы закручивания (в радианах), подставляя найденную реакцию в выражения (3.13) и (3.14). Сначала вычисляем относительные углы поворота сечений

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1 &= -0.993 \cdot 2 / (8 \cdot 10^{10} \cdot 0.644 \cdot 10^{-5}) = -3.845 \cdot 10^{-3}, \\ \tilde{\varphi}_2 &= 9.007 \cdot 4 / (8 \cdot 10^{10} \cdot 10.306 \cdot 10^{-5}) = 4.370 \cdot 10^{-3}, \\ \tilde{\varphi}_3 &= -8.993 \cdot 3 / (8 \cdot 10^{10} \cdot 38.349 \cdot 10^{-5}) = -0.879 \cdot 10^{-3}, \\ \tilde{\varphi}_4 &= 6.007 \cdot 5 / (8 \cdot 10^{10} \cdot 102.943 \cdot 10^{-5}) = 0.365 \cdot 10^{-3},\end{aligned}$$

затем абсолютные

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= 0.365 \cdot 10^{-3}, \\ \varphi_3 &= (-0.879 + 0.365) \cdot 10^{-3} = -0.515 \cdot 10^{-3}, \\ \varphi_2 &= (4.370 - 0.879 + 0.365) \cdot 10^{-3} = 3.855 \cdot 10^{-3}, \\ \varphi_1 &= (-3.845 + 4.370 - 0.879 + 0.365) \cdot 10^{-3} = -0.1 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

По значениям φ_4 , φ_3 и φ_2 строим эпюру углов поворота (рис. 29). Вычисление φ_1 является простой проверкой расчетов. По условию угол поворота сечения в левой заделке должен быть равным нулю. Кроме того, $\varphi_5 = 0$.

8. Вычисляем касательные напряжения на участках по формуле (3.5) (МПа)

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -993 \cdot 0.09 / (0.644 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = -6.939, \\ \tau_2 &= 9007 \cdot 0.18 / (10.306 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = 7.865, \\ \tau_3 &= -8993 \cdot 0.25 / (38.349 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = -2.931, \\ \tau_4 &= -6007 \cdot 0.32 / (102.943 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = 0.934.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Строим эпюру максимальных касательных напряжений (рис. 30). В точках приложения сосредоточенных моментов эпюра моментов имеет разрыв (скачок), а эпюра углов поворота — излом.

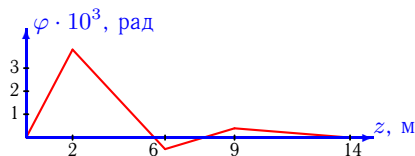


Рис. 29

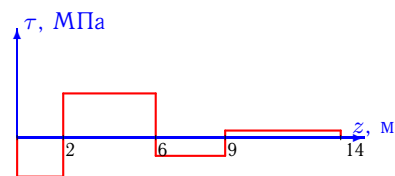


Рис. 30

Marle - программа решения статически неопределимой задачи на кручение приведена на с. 292.

Условия задач. Найти моменты заделок опор стального вала кусочно-постоянного круглого сечения. К валу приложены моменты