1 Дизъюнкция, конъюнкция и др.

1. Таблица истинности дизъюнкции, стрелка Пирса[1].

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

2. Таблица истинности. Конъюнкция, штрих Шеффера[2]

p	q	$p \wedge q$	$p\|q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

3. Таблица истинности. Импликация.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

4. Таблица истинности. Сложение по модулю 2. Эквиваленция

p	q	$p \oplus q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

2 Упрощение записи логических выражений

2.1 Законы

1. Коммутативность
$$x \vee y \equiv y \vee x, \quad xy \equiv yx,$$

2. Ассоциативность
$$(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z), \quad (xy)z \equiv x(yz),$$

3. Дистрибутивность
$$x(y \vee z) \equiv xy \vee xz, \quad x \vee (yz) \equiv (x \vee y)(x \vee z),$$

[1] Pierce C.S.
[2] Sheffer H.M.

4. Идемпотентность
$$x \vee x \equiv x, \quad xx \equiv x,$$

5. Закон логических постоянных
$$x1 \equiv x, \quad x0 \equiv 0, \quad x \vee 1 \equiv 1, \quad x \vee 0 \equiv x,$$

6. Закон двойного отрицания
$$\bar{\bar{x}} \equiv x$$

7. Закон де Моргана
$$\overline{xy} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}, \ \overline{x \vee y} \equiv \bar{x}\bar{y},$$

8. Элементарного поглощения
$$x \vee \bar{x}y \equiv x \vee y$$

9. Поглощения
$$x \vee xy \equiv x$$
$$x(x \vee y) \equiv x$$

10. Склеивания
$$xy \vee x\bar{y} \equiv x$$

11. Обобщенного склеивания
$$xz \vee y\bar{z} \vee xy \equiv xz \vee y\bar{z}.$$

12. Импликация
$$x \to y \equiv \bar{x} \vee y.$$

13. Эквиваленция
$$x \leftrightarrow y \equiv (xy) \vee (\bar{x}\bar{y}).$$

14. Исключающее «или» (сложение по модулю 2)
$$x \oplus y \equiv (\bar{x}y) \vee (x\bar{y}).$$

2.2 Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Каждая формула имеет конечное число вхождений переменных. Под *вхождением переменной* понимается место, которое переменная занимает в формуле. Задача заключается в том, чтобы для данной булевой функции f найти ДНФ, представляющую эту функцию и имеющую наименьшее число вхождений переменных.

Определение. *Элементарным произведением* называется конъюнкт, в который любая переменная входит не более одного раза.

Пример 6.6.1. Формула $x_2\bar{x}_3x_4$ — элементарное произведение, а формула $x_1x_2\bar{x}_3x_1x_4$ элементарным произведением не является.

Определение. Формула $\varphi(x_1, x_2, ...x_n)$ называется *импликантой* формулы $\psi(x_1, x_2, ...x_n)$, если φ – элементарное произведение и $\varphi \wedge \psi \sim \varphi$ т. е. для соответствующих формулам ψ и φ функций f_ψ и f_φ справедливо неравенство $f_\psi \leq f_\varphi$. Формула $\varphi(x_1, x_2, ...x_n)$ называется *импликантой* функции f, если φ — импликанта совершенной ДНФ, представляющей функцию f.

Определение. Импликанта $\varphi(x_1, x_2, ...x_n) = x_{i_1}^{\delta_1}x_{i_2}^{\delta_2}...x_{i_k}^{\delta_k}$ формулы ψ называется *простой,* если после отбрасывания любой литеры из φ не получается формула, являющаяся импликантой формулы ψ.

Пример 6.6.2. Найдем все импликанты и простые импликанты для формулы $\varphi(x, y) = x \to y$. Всего имеется 8 элементарных произведений с переменными x, y. Ниже приведены их таблицы истинности:

x	y	$\varphi(x,y) = x \to y$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}$	$\bar{y}$	x	y
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1

Из таблиц истинности заключаем, что формулы $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{x}y$, xy, $\bar{x}$, y — все импликанты формулы φ, а из этих импликант простыми являются формулы $\bar{x}$ и y (формула $\bar{x}\bar{y}$, например, не является простой импликантой, поскольку отбрасывая литеру $\bar{y}$, получаем импликанту $\bar{x}$.

Дизъюнкция всех простых импликант данной формулы (функции) называется *сокращенной ДНФ*.

Пример 6.6.3. Найдем все импликанты и простые импликанты для формулы $\varphi(x, y) = x \leftrightarrow y$. Всего имеется 8 элементарных произведений с переменными x, y. Ниже приведены их таблицы истинности:

x	y	$\varphi(x,y) = x \leftrightarrow y$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}$	$\bar{y}$	x	y
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1

Из таблиц истинности заключаем, что формулы $\bar{x}\bar{y}$, xy — простые импликанты формулы φ. Таким образом $x \leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$.

Теорема 6.6.1. *Любая булева функция, не являющаяся константой 0 представима в виде сокращенной ДНФ.*

В примере 6.6.2 функция, соответствующая формуле $x \to y$ представима формулой $\bar{x} \vee y$, которая является ее сокращенной ДНФ.

Сокращенная ДНФ может содержать лишние импликанты, удаление которых не меняет таблицы истинности. Если из сокращенной ДНФ удалить все лишние импликанты, то получается ДНФ, называемая *тупиковой*.

Заметим, что представление функции в виде тупиковой ДНФ в общем случае неоднозначно.

Выбор из всех тупиковых форм формы с наименьшим числом вхождений переменных дает *минимальную ДНФ (МНДФ)*.

Теорема 6.6.2 (теорема Квайна). *Если исходя из совершенной ДНФ функции произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ, т. е. дизъюнкция всех простых импликант.*

Пример 6.6.4. Пусть функция $f(x, y, z)$ задана совершенной ДНФ $\varphi = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xyz$. Тогда, производя операции склеивания, а затем элементарного поглощения, имеем

$$\varphi \sim \bar{x}\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee \bar{y}z(\bar{x} \vee x) \vee xz(\bar{y} \vee y) \sim \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xz.$$

Для получения минимальной ДНФ из сокращенной ДНФ используется *матрица Квайна,* которая строится следующим образом. В заголовках столбцов таблицы записываются конституенты единицы совершенной ДНФ, а в заголовках строк — простые импликанты из полученной сокращенной ДНФ. В таблице звездочками отмечаются те пересечения строк и столбцов, для которых конъюнкт, стоящий в заголовке строки, входит в конституенту единицы, являющейся заголовком столбца.

Для примера 6.6.4 матрица Квайна имеет вид

Импликанты	Конституенты единицы			
	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$x\bar{y}z$	xyz
$\bar{x}\bar{y}$	*	*		
$\bar{y}z$		*	*	
xz			*	*

В тупиковую ДНФ выбирается минимальное число простых импликант, дизъюнкция которых сохраняет все конституенты единицы, т. е. каждый столбец матрицы Квайна содержит звездочку, стоящую на пересечении со строкой, соответствующей одной из выбранных импликант. В качестве минимальной ДНФ выбирается тупиковая, имеющая наименьшее число вхождений переменных.

В примере 6.6.4 по матрице Квайна находим, что минимальная ДНФ заданной функции есть $\bar{x}\bar{y} \vee xz$.

В силу принципа двойственности для булевых алгебр все приведенные понятия и рассуждения очевидным образом можно преобразовать для нахождения минимальных конъюнктивных нормальных форм (МКНФ).

2.3 Пример упрощения

1. Упростить СДНФ функции $f = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

Решение

Вынесем за скобки в первой паре $\bar{x}y$, в последней паре выражений xy:

$$f = \bar{x}y(\bar{z} \vee z) \vee x\bar{y}z \vee xy(\bar{z} \vee z)$$

Очевидно, $\bar{z} \vee z = 1$, $\bar{z} \vee z = 1$. Получим

$$f = \bar{x}y \vee x\bar{y}z \vee xy$$

Переставим местами слагаемые и вынесем за скобки y:

$$f = \bar{x}y \vee xy \vee x\bar{y}z = y(\bar{x} \vee x) \vee x\bar{y}z = y \vee x\bar{y}z$$

Воспользуемся законом дистрибутивности

$$f = y \vee x\bar{y}z = (y \vee x)(y \vee \bar{y})(y \vee z)$$

Упростим

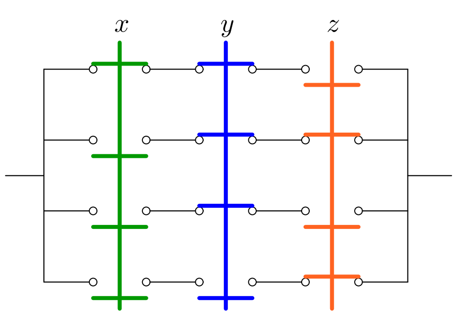
$$f = (y \vee x)(y \vee z)$$

Еще раз воспользуемся законом дистрибутивности

$$f = (y \vee x)(y \vee z) = y \vee xz$$

2.4 Переключательная схема

Упростить переключательную схему (x - включено, $\bar{x}$ - выключено).



Решение

Переключательной схеме соответствует формула

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$$

Из второго и третьего слагаемого можно вынести общий множитель $\bar{x}y$

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}y(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\bar{y}z$$

Упростим

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z$$

Преобразуем

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}(y \vee \bar{y}z)$$

Пользуясь законом элементарного поглощения, получим

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}(y \vee z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z.$$

Эту же операцию произведем с первыми двумя слагаемыми:

$$f = y(x\bar{z} \vee \bar{x}) \vee \bar{x}z = y(\bar{z} \vee \bar{x}) \vee \bar{x}z = y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z.$$

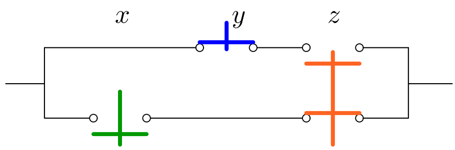
Если в законе обобщенного склеивания взять $\bar{x}$ вместо x, то получим

$$f = \bar{x}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y = \bar{x}z \vee y\bar{z}.$$

Ответ:

$$f = \bar{x}z \vee y\bar{z}.$$

Упрощенный переключатель примет вид



2.5 Команды Maple 11

Для использования команд необходимо подключить пакет `with(Logic)`.

Отрицание	$\bar{q}$		`&not q`
Дизъюнкция	$p \vee q$		`p&or q`
Конъюнкция	$p \wedge q = pq$		`p&and q`
Стрелка Пирса	$p \downarrow q$	$\bar{p}\bar{q}$	`p&nor q`
Штрих Шеффера	$p \vert q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	`p&nand q`
Импликация	$p \longrightarrow q$	$\bar{p} \vee q$	`p&implies q`
Эквиваленция	$p \leftrightarrow q$	$pq \vee \bar{p}\bar{q}$	`p&if q`
Сложение по модулю 2	$p \oplus q$	$\bar{p}q \vee p\bar{q}$	`p&xor q`