РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

6.1 Элементы линейной алгебры: матрицы, определители, системы линейных уравнений

- **Условия задач**

1. Составить две матрицы A и B третьего порядка, продолжить заданное матричное равенство и проверить его справедливость (варианты заданий см. в приложении 1).
2. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив его по элементам первой строки и по элементам *любого* столбца. Убедиться в правильности вычислений, сопоставив результаты (см. решение примеров 1.9, 1.11. Варианты заданий – приложение 2).
3. Решить по правилу Крамера неоднородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными (см. решение примера 1.13. Варианты заданий – приложение 3).
4. Решить систему линейных уравнений (из пункта 3) методом обратной матрицы. Сравнить полученные результаты с результатами пункта 3 (см. решение примера 1.15).

5. Составить и решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, где A и B невырожденные матрицы второго порядка. Полученное решение проверить подстановкой (см. решение примера 1.16).
6. Решить систему линейных уравнений (из пункта 3) методом Гаусса (см. решение примера 1.17).
7. Найти общее решение каждой из двух систем линейных уравнений (см. решение примера 1.22. Варианты заданий – приложение 4).
8. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$ (для *нечетных* вариантов), $X \cdot A = B$ (для *четных* вариантов) или доказать, что решения не существует. (Матрицы A, B и варианты заданий приведены в приложении 5). Разбор решения задачи приводится ниже.

- **Комментарий к решению задач**

Задача 8. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$.

Решение. Метод обратной матрицы при решении матричных уравнений вида $A \cdot X = B$ невозможно использовать, если матрица A – вырожденная (т.е. A^{-1} не существует). Однако это не означает, что решить такое уравнение вообще невозможно. Воспользуемся методом Гаусса, имеющим более широкую область применения.

Пусть, например, уравнение имеет вид $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, обратная матрица A^{-1} не существует.

Для решения уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

сначала перемножим матрицы, стоящие в левой части.

$$\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} + x_{31} & x_{12} + x_{22} + x_{32} \\ 2x_{11} + 3x_{21} + 3x_{31} & 2x_{12} + 3x_{22} + 3x_{32} \\ 3x_{11} + 4x_{21} + 4x_{31} & 3x_{12} + 4x_{22} + 4x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Равенство двух матриц эквивалентно системе шести линейных уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} & & = 0, \\ 2x_{11} + 3x_{21} + 3x_{31} & & = 8, \\ 3x_{11} + 4x_{21} + 4x_{31} & & = 8, \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 10, \\ & 2x_{12} + 3x_{22} + 3x_{32} & = 0, \\ & 3x_{12} + 4x_{22} + 4x_{32} & = 2, \end{cases}$$

которую решим методом Гаусса. Проведем элементарные преобразования расширенной матрицы системы:

$\overline{A} = (A \mid B) =$

$$=\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Система решений не имеет, так как в последней строке расширенной матрицы все элементы в части A равны 0, а элемент $b_6 = 1 \neq 0$.

Замечание. Используемая при решении расширенная матрица системы имеет особый вид, позволяющий «разбить» ее на две вспомогательные матрицы и выполнить преобразования этих матриц по отдельности, а именно:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \ldots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \ldots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0, \\ x_{21} + x_{31} = 8, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1, \\ x_{22} + x_{32} = -2, \\ 0 = 1. \end{cases}$$

Система несовместна.

Ответ: Данное матричное уравнение решений не имеет.

6.2 Векторная алгебра

- **Условия задач**

1. Пользуясь определением, показать, что векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ линейно независимы, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$.
2. Проверить коллинеарны ли векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
3. В треугольнике ABC проведены медиана и биссектриса из вершины A. Найти их длины и угол между медианой и биссектрисой.
4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
5. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.
6. Для треугольной пирамиды $ABCD$ найти объем и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Условия вариантов приведены в приложении 6.

- **Комментарий к решению задач**

Задача 1. Показать, что векторы $\overline{m} = (-1, 2, 4)$, $\overline{n} = (1, 0, 1)$, $\overline{p} = (0,1,2)$ линейно независимы, и найти координаты вектора $\overline{a} = (-1, 2, 8)$ в базисе $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$.

Решение. Векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ линейно независимы, если из равенства

$$\lambda_1 \overline{m} + \lambda_2 \overline{n} + \lambda_3 \overline{p} = \overline{o} \qquad (6.1)$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Подставляя в формулу (6.1) координаты векторов $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ получим:

$$\lambda_1 \cdot (-1, 2, 4) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

или $(-\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_3, 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = (0,0,0)$. Последнее равенство равносильно однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

определитель которой отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, система имеет единственное нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Поэтому, векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ линейно независимы и образуют базис трехмерного линейного пространства.

Найдем координаты вектора $\overline{a} = (-1, 2, 8)$ в базисе $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{m} + \lambda_2 \overline{n} + \lambda_3 \overline{p} ,$$

или $(-1, 2, 8) = \lambda_1 (-1, 2, 4) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (0, 1, 2)$,

$$(-1, 2, 8) = (-\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_3, 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3),$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = -1, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 2, \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 8. \end{cases}$$

Последнюю систему решим по правилу Крамера: $\Delta = 1 \neq 0$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -8,$$

и тогда $\lambda_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 5$, $\lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 4$, $\lambda_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -8$.

В результате $\overline{a} = 5\overline{m} + 4\overline{n} - 8\overline{p}$. Вектор $\overline{a}$ в разложении по базису $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ имеет координаты $\overline{a} = (5, 4, -8)$.

Задача 2. Проверить коллинеарны ли векторы $\overline{a} = 3\overline{m} - \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} + 2\overline{n}$, если $\overline{m} = (1; 0{,}5; 3)$, $\overline{n} = (2; 1; 6)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a} = 3(1; 0{,}5; 3) - (2; 1; 6) = (3; 1{,}5; 9) - (2; 1; 6) = (1; 0{,}5; 3)$,

$\overline{b} = (1; 0{,}5; 3) + 2(2; 1; 6) = (5; 2{,}5; 15)$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то должно выполняться равенство $\overline{a} = \lambda\overline{b}$, и поэтому координаты векторов должны быть пропорциональны. Проверим пропорциональность координат:

$\dfrac{1}{5} = \dfrac{1/2}{5/2} = \dfrac{3}{15} = \lambda$. Все координаты пропорциональны, поэтому векторы коллинеарны. Заметим, что $\lambda = 0{,}2 > 0$, следовательно, векторы сонаправлены, и длина вектора $\overline{a}$ в пять раз меньше длины вектора $\overline{b}$.

Задача 3. В треугольнике ABC проведены медиана и биссектриса из вершины A. Найти их длины и угол между медианой и биссектрисой, если $A(1,-2,1)$, $B(4,2,1)$, $C(4,-2,1)$.

Решение. Основание биссектрисы AK – точка K делит сторону BC на отрезки BK и CK, длины которых пропорциональны длинам прилегающих к ним сторон треугольника – AB и AC,

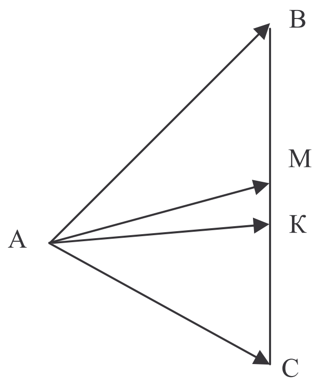

Рис. 6.1

т.е. $\dfrac{BK}{KC}=\dfrac{AB}{AC}=\lambda$. Найдем длины сторон и отношение λ.

$$\overline{AB}=(3,4,0); \qquad \left|\overline{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5,$$

$$\overline{AC}=(3,0,0); \qquad \left|\overline{AC}\right|=\sqrt{3^2+0^2+0^2}=3.$$

Отношение $\lambda = 5/3$. Координаты точки K, которая делит отрезок BC в отношении $5:3$ или $\frac{BK}{KC} = \frac{5}{3}$, можно вычислить по формулам:

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda}, \\ y_K = \dfrac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda}, \\ z_K = \dfrac{z_B + \lambda z_C}{1+\lambda}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_K = \dfrac{4 + \frac{5}{3}\cdot 4}{1+\frac{5}{3}} = 4, \\ y_K = \dfrac{2 - \frac{5}{3}\cdot 2}{1+\frac{5}{3}} = -\dfrac{1}{2}, \\ z_K = \dfrac{1 + \frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}} = 1. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Следовательно, точка K имеет координаты $K(4;-0{,}5;1)$. Теперь найдем вектор $\overline{AK}$ и длину биссектрисы:

$$\overline{AK} = (3;1{,}5;0), \qquad \left|\overline{AK}\right| = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2 + 0^2} = 1{,}5\sqrt{5}.$$

Основание медианы AM – точка M делит сторону BC на две равные части, поэтому $\lambda = \frac{BM}{MC} = 1$. Координаты точки M находим из соотношений (6.2) как координаты середины отрезка:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2}, \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2}, \\ z_M = \dfrac{z_B + z_C}{2}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x_M = \dfrac{4+4}{2} = 4, \\ y_M = \dfrac{2-2}{2} = 0, \\ z_M = \dfrac{1+1}{2} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, точка M имеет координаты $M(4,0,1)$, вектор $\overline{AM}=(3,2,0)$, длина медианы равна $\left|\overline{AM}\right|=\sqrt{3^2+2^2+0^2}=\sqrt{13}$.

Угол между медианой AM и биссектрисой AK найдем как угол между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{AK}$.

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{AM},\overline{AK}\right)}{\left|\overline{AM}\right|\cdot\left|\overline{AK}\right|}=\frac{3\cdot 3+1{,}5\cdot 2+0\cdot 0}{1{,}5\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{65}},$$

$$\varphi=\arccos\frac{8}{\sqrt{65}}\approx 7^\circ.$$

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $\angle(\overline{p},\overline{q})=5\pi/6$.

Решение. Площадь параллелограмма найдем как модуль векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $S=\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$. Вычислим векторное произведение:

$$[\overline{a},\overline{b}]=\left[(\overline{p}+3\overline{q}),(2\overline{p}-\overline{q})\right]=2[\overline{p},\overline{p}]+6[\overline{q},\overline{p}]-[\overline{p},\overline{q}]-3[\overline{q},\overline{q}]=$$
$$=\overline{o}+6[\overline{q},\overline{p}]-[\overline{p},\overline{q}]-\overline{o}=6[\overline{q},\overline{p}]+[\overline{q},\overline{p}]=7[\overline{q},\overline{p}].$$

В преобразованиях использовались следующие свойства векторного произведения:

- векторное произведение $[\overline{a},\overline{a}]=\overline{o}$ для любого вектора $\overline{a}$, поскольку вектор $\overline{a}$ коллинеарен самому себе;

- $\left[\overline{p},\overline{q}\right]=-\left[\overline{q},\overline{p}\right]$, так как перестановка сомножителей в векторном произведении влечет за собой изменение знака произведения.

Далее получим:

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|=\left|7[\overline{q},\overline{p}]\right|=7\left|[\overline{q},\overline{p}]\right|=7|\overline{q}|\cdot|\overline{p}|\cdot\sin\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right)=$$

$$=7\cdot1\cdot2\cdot\sin(5\pi/6)=14\cdot0{,}5=7\,.$$

Итак, площадь параллелограмма $S=7\left(ед^2\right)$.

Задача 5. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, если $\overline{a}=(1,3,2)$, $\overline{b}=(2,3,4)$, $\overline{c}=(3,2,9)$.

Решение. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&3&4\\3&2&9\end{vmatrix}=-9\neq0\,.$$

Векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ не компланарны.

Задача 6. Для треугольной пирамиды $ABCD$ найти объем и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, если $A(1,-3,8)$, $B(2,2,-1)$, $C(4,-5,3)$, $D(1,-1,2)$.

Решение. Вычислим объем пирамиды с помощью смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}=(1,5,-9),\quad \overline{AC}=(3,-2,-5),\quad \overline{AD}=(0,2,-6).$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|.$$

Смешанное произведение

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}1 & 5 & -9\\ 3 & -2 & -5\\ 0 & 2 & -6\end{vmatrix}=58,$$

и тогда объем пирамиды равен $V=\frac{58}{6}=9\frac{2}{3}$.

Теперь найдем высоту пирамиды. Известно, что объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}HS_{ABC},\ \text{отсюда}\ H=\frac{3V}{S_{ABC}}.$$

Площадь треугольника ABC вычислим, используя модуль векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 5 & -9\\ 3 & -2 & -5\end{vmatrix}=-43\bar{i}-22\bar{j}-17\bar{k}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB},\overline{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-43)^2+(-22)^2+(-17)^2}\approx 25{,}6.$$

В результате высота пирамиды равна $H=\dfrac{3\cdot\frac{58}{6}}{25{,}6}\approx 1{,}13$.

6.3 Аналитическая геометрия. Линейные геометрические объекты на плоскости и в пространстве

- **Условия задач**

1. Составить уравнения прямых, расположенных в плоскости Oxy, проходящих через точку P параллельно и перпендикулярно заданной прямой.
2. Выяснить взаимное расположение прямых, расположенных в плоскости Oxy. Если они пересекаются, найти точку пересечения и угол между прямыми.
3. Найти расстояние от точки M до плоскости γ, проходящей через точки A, B, C.
4. Составить уравнение плоскости π:

a) содержащей точку A и перпендикулярной плоскостям α и β (для *нечетных* вариантов);

b) содержащей точки A, B и перпендикулярной плоскости α (для *четных* вариантов).

5. Найти угол между плоскостями α и β.
6. Составить канонические уравнения прямой l – линии пересечения плоскостей α и β.