6.4. Приложение векторной алгебры и аналитической геометрии. Расчет пирамиды

● **Условия задач**

1. Выбрать в декартовой прямоугольной системе координат четыре произвольные точки A, B, C, D так, чтобы они не лежали ни в одной из координатных плоскостей.

1.1. Проверить, не принадлежат ли эти точки одной плоскости (если все они расположены в одной плоскости, то следует изменить координаты одной из точек).

1.2. Проверить, не является ли треугольник ΔABC равнобедренным (в случае утвердительного ответа измените координаты одной из точек).

2. Рассмотреть пирамиду $DABC$ с вершинами в точках A, B, C, D и, выбрав в качестве основания пирамиды ΔABC, определить или составить:

2.1. Возможные уравнения плоскости, содержащей точки A, B, C.

2.2. Возможные уравнения прямой l_1, проходящей через точки A и B.

2.3. Площадь ΔABC.

2.4. В ΔABC найти высоту CE, опущенную из вершины C на сторону AB, координаты основания высоты (точки E) и составить уравнение прямой l_{CE}, содержащей эту высоту.

2.5. В ΔABC найти длину медианы CM и составить уравнение прямой l_{CM}, содержащей медиану CM.

2.6. В ΔABC найти биссектрису CK угла $\angle ACB$ и составить уравнение прямой l_{CK}, содержащей биссектрису. Задачу решить двумя способами.

3. Расчеты в пирамиде $DABC$.

3.1. Составить уравнение прямой l_{DH}, содержащей высоту пирамиды DH и найти ее длину. Задачу решить двумя способами.

3.2. Найти объем пирамиды $DABC$ (двумя способами).

3.3. Найти угол между гранями ABC и ADB.

3.4. Найти угол между ребром DA и основанием пирамиды.

4. Составить уравнения скрещивающихся прямых l_{CD} и l_{AB}.

4.1. Найти угол между прямыми l_{CD} и l_{AB}.

4.2. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми (двумя способами).

● **Комментарий к решению задач**

Задача 1. Выберем четыре точки, так, чтобы они не лежали ни в одной из координатных плоскостей $A(1,-1,-2)$, $B(-1,-2,3)$, $C(3,2,3)$, $D(1,-3,4)$.

1.1. Проверим, не лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости. Для этого следует рассмотреть три вектора $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и если векторы компланарны, то точки будут принадлежать одной плоскости. Так как $\overline{AB} = (-2,-1,5)$, $\overline{AC} = (2,3,5)$, $\overline{AD} = (0,-2,6)$ и

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 5\\ 0 & -2 & 6\end{vmatrix}=-64\neq 0,$$

то точки A,B,C,D в одной плоскости не лежат.

1.2. Проверим, не является ли ΔABC равнобедренным. Для этого найдем длины сторон треугольника:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2+5^2}=\sqrt{30},\quad \left|\overline{AC}\right|=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=\sqrt{38},$$

$\left|\overline{AD}\right|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$.

Среди сторон нет равных, и поэтому ΔABC не является равнобедренным.

2. Рассмотрим ΔABC.

2.1. Составим различные уравнения плоскости π_1, содержащей точки A,B,C.

Общее уравнение плоскости, найдем как уравнение плоскости, проходящей через три точки (условие компланарности векторов $\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}$):

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z+2\\ -2 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=0$$

или $(x-1)(-20)-(y+1)(-20)+(z+2)(-4)=0$, или

$$-5x+5y-z+8=0.$$

Параметрическое уравнение плоскости π_1. Начальной точкой плоскости выберем точку A, а в качестве направляющих векторов плоскости возьмем векторы $\overline{AB},\overline{AC}$. Параметрическое уравнение плоскости π_1 имеет вид

$$\begin{cases}x=1-2t+2\tau,\\ y=-1-t+3\tau,\\ z=-2+5t+5\tau,\end{cases}\qquad \tau\in R, t\in R.$$

Нормированное уравнение плоскости π_1 получим умножением общего уравнения плоскости на нормирующий множитель

$$\mu=\frac{-1}{\sqrt{5^2+5^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{51}}.$$

Оно имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{51}}(5x-5y+z-8)=0$$

Уравнение плоскости в отрезках получим из общего уравнения:

$$\frac{x}{8/5}+\frac{y}{-8/5}+\frac{z}{1/5}=1.$$

2.2. Выпишем различные виды уравнения прямой l_1, проходящей через точки A и B. Примем за начальную точку прямой точку A, а вектор $\overline{q}_1=\overline{AB}=(-2,-1,5)$ возьмем в качестве направляющего вектора возьмем.

Параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \quad t \in R, \\ z = -2 + 5t, \end{cases}$$

Каноническое уравнение:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{5}.$$

Уравнение прямой, определяемой как линии пересечения двух непараллельных плоскостей. Прямая l_1 лежит на пересечении плоскости π_1 и π_2, содержащей точки A, D, B. Уравнение π_2 получим из условия компланарности векторов $\overline{AM}, \quad \overline{AB}, \quad \overline{AD}$

$$\left(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

или $\pi_2 : x + 3y + z + 4 = 0$, следовательно, координаты точек прямой l_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 5x - 5y + z - 8 = 0, & \pi_1(ABC), \\ x + 3y + z + 4 = 0, & \pi_2(ABD). \end{cases}$$

Можно сделать проверку. Непосредственная подстановка координат точки $A(1,-1,-2)$ в уравнения системы дает два тождества

$$\begin{cases} 1 + 3(-1) + (-2) + 4 = 0, \\ 5 \cdot 1 - 5(-1) + (-2) - 8 = 0, \end{cases}$$

и, значит, точка A принадлежит прямой l_1.

Направляющий вектор прямой l_1, можно найти как векторное произведение векторов нормали $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ плоскостей π_1 и π_2 соответственно

$$\overline{q_2} = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8\bar{i} - 4\bar{j} + 20\bar{k}.$$

Поскольку $\overline{q_2} = (-8,-4,20) = 4(-2,-1,5)$, то векторы $\overline{q_1}$ и $\overline{q_2}$ коллинеарны и оба могут служить направляющими векторами нашей прямой.

2.3. Найдем площадь ΔABC. Поскольку

$$\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = (-20,20,-4),$$

то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{816} = 2\sqrt{51}.$$

Сначала составим уравнение высоты ΔABC, опущенной на сторону AB, и найдем ее длину.

2.4. Пусть CE искомая высота и $E(x_1, y_1, z_1)$. Точка E принадлежит прямой l_1, поэтому существует такое $t = t_1$, что (параметрические уравнения)

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t_1, \\ y_1 = -1 - t_1, \\ z_1 = -2 + 5t_1. \end{cases}$$

С другой стороны, т.к. $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, имеем $(\overline{CE}, \overline{AB}) = 0$ или

$$-2(x_1 - 3) + (-1)(y_1 - 2) + 5(z_1 - 3) = 0,$$

Следовательно,

$-2(1 - 2t_1 - 3) + (-1)(-1 - t_1 - 2) + 5(-2 + 5t_1 - 3) = 0$, откуда $t_1 = \dfrac{3}{5}$ и,

$$x_1 = -\frac{1}{5}, \quad y_1 = -\frac{8}{5}, \quad z_1 = 1.$$

Таким образом, $E\left(-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{8}{5}, 1\right)$, $\overline{CE} = \left(-\dfrac{16}{5}, -\dfrac{18}{5}, -\dfrac{10}{5}\right)$

и $$h = \left|\overline{CE}\right| = \sqrt{\frac{16^2 + 18^2 + 10^2}{25}} = 2\frac{\sqrt{34}}{5}.$$

2-ой способ. Поскольку известно, что $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} h \left|\overline{AB}\right|$, а $S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{51}$, $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{30}$, то.

$$h = \frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overline{AB}\right|} = 4\sqrt{\frac{51}{30}} = 2\sqrt{\frac{34}{5}},$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

Уравнение высоты составим, выбрав в качестве направляющего вектора $\overline{q}_3 = -\dfrac{5}{2}\overline{CE} = (8,9,5)$ и в качестве начальной точки — точку $C(3,2,3)$. Параметрическое уравнение высоты имеет следующий вид $\begin{cases} x = 8t + 3, \\ y = 9t + 2, \\ z = 5t + 3, \end{cases}$ $t \in R$.

2.5. Рассмотрим медиану CM в ΔABC (рис.6.10).
Очевидно, что $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, где $\overline{CA} = (-2,-3,-5)$,
$\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = (-1, -1/2, 5/2)$, поэтому $\overline{CM} = (-3, -7/2, -5/2)$.

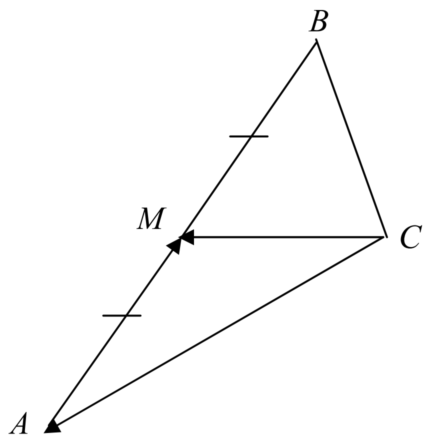

Рис. 6.10

Параметрическое уравнение медианы (направляющий вектор $\overline{q}_4 = -2\overline{CM} = (6,7,5)$, начальная точка $C(3,2,3)$)

$$\begin{cases} x = 6t + 3, \\ y = 7t + 2, \\ z = 5t + 3, \end{cases} \quad t \in R.$$

Длина медианы $m = \left|\overline{CM}\right| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110}$.

2.6. Рассмотрим биссектрису CK угла $A\widehat{C}B$, найдем ее длину и составим уравнение биссектрисы.

1-ый способ. Воспользуемся параметрическим уравнением прямой l_1, которому удовлетворяют координаты точки $K(x_2, y_2, z_2)$ при некотором значении t_2 параметра $\begin{cases} x_2 = -2t_2 + 1, \\ y_2 = -t_2 - 1, \\ z_2 = 5t_2 - 2. \end{cases}$

Поскольку CK − биссектриса, то углы $\alpha = \beta$ и $\cos\alpha = \cos\beta$. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{CA}, \overline{CK})}{\left|\overline{CA}\right| \cdot \left|\overline{CK}\right|} = \frac{(\overline{CB}, \overline{CK})}{\left|\overline{CB}\right| \cdot \left|\overline{CK}\right|} = \cos\beta.$$

Сокращая здесь на $\left|\overline{CK}\right|$, получим $\frac{(\overline{CA}, \overline{CK})}{\left|\overline{CA}\right|} = \frac{(\overline{CB}, \overline{CK})}{\left|\overline{CB}\right|}$ или, учитывая, что $\overline{CK} = (-2 - 2t_2, -3 - t_2, -5 + 5t_2)$, $\overline{CB} = (-4, -4, 0)$, $\overline{CA} = (-2, -3, -5)$, придем к равенству

$$\frac{2(2 + 2t_2) + 3(3 + t_2) - 5(-5 + 5t_2)}{\sqrt{38}} = \frac{4(2 + 2t_2) + 4(3 + t_2)}{\sqrt{32}},$$

откуда $t_2 = \frac{76 - 10\sqrt{19}}{36 + 6\sqrt{19}} \approx 0{,}52$ [1].

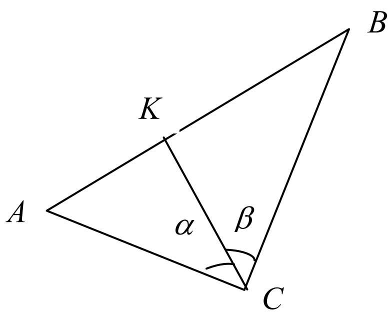

Рис. 6.11

Таким образом, $\left|\overline{CK}\right| = (-3{,}04; -3{,}52; -2{,}4)$ и длина биссектрисы

$$b = \left|\overline{CK}\right| = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}52)^2 + (2{,}4)^2} \approx 5{,}23.$$

Уравнение биссектрисы (направляющий вектор $\bar{q}_5 = \overline{CK}$, начальная точка $C(3,2,3)$) имеет вид $\begin{cases} x = 3 - t \cdot 3{,}04, \\ y = 2 - t \cdot 3{,}52, \\ z = 3 - t \cdot 2{,}4, \end{cases}$

$t \in R$.

2-ой способ. Из элементарной геометрии известно, что точка K (основание биссектрисы) делит основание AB в отношении λ/μ, где

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{19}}{4} \approx 1{,}09.$$

[1] Расчеты проводим с точностью до второго знака после запятой.

При этом координаты точки $K(x_2, y_2, z_2)$ вычисляются через координаты концов отрезка AB по известным формулам деления отрезка в заданном отношении (формулы 3.2). Подставляя в эти формулы соответствующие значения координат, получим

$$x_2 \approx \frac{1+1{,}09(-1)}{1+1{,}09} = -0{,}04; \quad y_2 \approx \frac{-1+1{,}09(-2)}{1+1{,}09} = -1{,}52;$$
$$z_2 \approx \frac{-2+1{,}09\cdot 3}{1+1{,}09} = 0{,}61.$$

откуда $\overline{CK} = (-3{,}04; -3{,}52; -2{,}39)$. Длина биссектрисы $b = \left|\overline{CK}\right| = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}52)^2 + (2{,}39)^2} \approx 5{,}23$, что совпадает с предыдущими вычислениями.

3. Рассмотрим теперь пирамиду $DABC$:

3.1. Составим уравнение высоты, опущенной из вершины D на основание, и найдем ее длину.

1-ый способ. Высоту пирамиды найдем, подставив координаты точки $D(1,-3,4)$ в нормированное уравнение плоскости π_1

$$H = d = \frac{1}{\sqrt{51}}\left|5\cdot 1 - 5(-3) + 4 - 8\right| = \frac{16}{\sqrt{51}}.$$

2-ой способ. Найдем сначала координаты точки $Q(x_3, y_3, z_3)$ – проекции вершины D на плоскость основания π_1.. Очевидно, числа x_3, y_3, z_3 удовлетворяют общему уравнению плоскости π_1

$$-5x_3 + 5y_3 - z_3 + 8 = 0,$$

но одного этого уравнения недостаточно для определения трех неизвестных чисел. В то же время легко заметить, что вектор $\overline{DQ} = (x_3 - 1, y_3 + 3, z_3 - 4)$ коллинеарен вектору нормали $\overline{N} = (-5,5,-1)$ плоскости π_1, т.е. $\overline{DQ} = \mu\overline{N}$, где $\mu \neq 0$ некоторая постоянная. Последнее равенство равносильно трем соотношениям

$$x_3 = 1 - 5\mu, \quad y_3 = -3 + 5\mu, \quad z_3 = 4 - \mu.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, получим

$$-5(1-5\mu) + 5(-3+5\mu) - (4-\mu) + 8 = 0,$$

откуда $\mu = \dfrac{16}{51}$, и в результате

$$\overline{DQ} = \mu\overline{N} = \frac{16}{51}(-5,5,-1).$$

Высота пирамиды $H = \dfrac{16}{51}\sqrt{5^2 + 5^2 + 1^2} = \dfrac{16}{\sqrt{51}}$, что подтверждает предыдущие вычисления.

3.2. Найдем теперь объем пирамиды $DABC$.

1-ый способ.

$$V_{пир} = \frac{1}{3}HS_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\frac{16}{\sqrt{51}}\sqrt{204} = \frac{32}{3}.$$

2-ой способ. Вычислим теперь объем пирамиды через смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|-64\right| = \frac{32}{3}.$$

3.3. Угол между гранями пирамиды ABC и ADB это угол между плоскостями π_1 и π_2:

$$\cos\psi = \frac{|(\overline{n_1},\overline{n_2})|}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{|-5\cdot 1+5\cdot 3-1\cdot 1|}{\sqrt{51}\cdot\sqrt{11}} = \frac{9}{\sqrt{561}} \approx 0{,}38, \qquad \psi \approx 68^\circ.$$

3.4. Угол φ между ребром пирамиды DA и ее основанием найдем, используя скалярное произведение векторов $\overline{DA} = (0,2,-6)$ и $\overline{n_1} = (-5,5,-1)$:

$$\cos\theta = \frac{|(\overline{DA},\overline{n_1})|}{|\overline{DA}||\overline{n_1}|} = \frac{|0\cdot(-5)+2\cdot 5+(-6)\cdot(-1)|}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{51}} = \frac{4}{\sqrt{510}} \approx 0{,}18, \quad \theta \approx 80^\circ \text{ и}$$

$$\varphi \approx 90^0 - 80^0 = 10^0.$$

4. Составим уравнение прямой l_{CD} (проходит через точки C и D, направляющий вектор $\overline{q}_6 = \overline{CD} = (-2,-5,1)$, начальная точка $C(3,2,3)$): $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{1}$. Напомним каноническое уравнение прямой l_{AB} (проходит через точки A и B, направляющий вектор $\overline{q}_1 = (-2,-1,5)$):

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{5}.$$

4.1. Угол φ между угол между прямыми l_{CD} и l_{AB}.

$$\cos\varphi = \frac{|(\overline{q}_1,\overline{q}_6)|}{|\overline{q}_1||\overline{q}_6|} = \frac{|(-2)(-2)+(-1)(-5)+5\cdot 1|}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{30}} = \frac{7}{15}, \text{ откуда } \varphi \approx 62^\circ.$$

4.2. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

1-ый способ. Вычислим объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{q}_1 = \overline{AB}$, $\overline{q}_6 = \overline{CD}$ и $\overline{AC}$.

Поскольку

$$\left(\overline{AB},\overline{CD},\overline{AC}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 64,$$

то объем параллелепипеда $V_o = |\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AC}\right)| = 64$. Площадь основания параллелепипеда $S_{осн} = \left|\left[\overline{AB},\overline{CD}\right]\right|$.

Вычислим векторное произведение $\left[\overline{AB},\overline{CD}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 24\overline{i} - 8\overline{j} + 8\overline{k}$,

и, следовательно, $S_{осн} = \left|\left[\overline{AB},\overline{CD}\right]\right|$.

В результате расстояние между скрещивающимися прямыми равно

$$d = H = \frac{V_0}{S_{осн}} = \frac{64}{8\sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{11}}.$$

2-ой способ. Через прямую l_1 проведем плоскость π_0, которая будет параллельна прямой l_6. Эта плоскость содержит точку $A(1,-1,2)$ и имеет направляющие векторы $\bar{q}_1 = \overline{AB} = (-2,-1,5)$, $\bar{q}_6 = \overline{CD} = (-2,-5,1)$. Запишем общее уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 24(x-1) - 8(y+1) + 8(z-2) = 24x - 8y + 8z - 16 = 0$$

После умножения на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{8\sqrt{3^2+1+1}} = \frac{1}{8\sqrt{11}}$$

получим нормированное уравнение π_0

$$\frac{1}{\sqrt{11}}(3x - y + z - 2) = 0\,.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми найдем как расстояние от точки $C(3,2,3)$ прямой l_6 до плоскости π_0:

$$d = \frac{1}{\sqrt{11}}\left|3\cdot 3 - 2 + 3 - 2\right| = \frac{8}{\sqrt{11}}\,,$$

что подтверждает полученный выше результат.