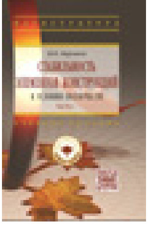

Индуктивный анализ квазистатического критерия выпучивания стержня при ползучести

Кирсанов М.Н., НИУ МЭИ, C216@ya.ru

14 февраля 2016 г.

Аннотация. Квазистатический критерий Работнова-Шестерикова выпучивания стержней в условии ползучести обобщается на высшие производные возмущения прогиба. Полученный результат не зависит от начального прогиба стержня и определяет зависимость между приложенной нагрузкой и временем выпучивания.

1 Квазистатический критерий

Одним из первых критериев выпучивания при ползучести был критерий Работнова-Шестерикова [1]. Предлагалась оценивать критическую ситуацию по нарастанию или убыванию прогиба стержня в первый момент возмущения. В данной работе индуктивным методом этот критерий расширяется на высшие производные. Безусловно, степень опасности момента, до которого N-я производная возмущения прогиба убывает, а после этого момента начинает расти, не ясна. Однако, пренебрегать такой информацией нельзя.

2 Квазистатический критерий

Будем рассматривать стержни, выполненные из реологического материала с определяющим соотношением

$$\dot{p}\, h(p) = f(\sigma),$$

σ — напряжение, $p = \varepsilon - \sigma/E$ — деформация ползучести, $h(p)$ — функция упрочнения, часто степенная, функция f — устанавливает зависимость от уровня напряжений, также обычно степенная. В [1] получено решение для амплитуды прогиба стержня

$$U(p) = \frac{1}{1-\omega}\frac{e^{\lambda p}}{h(p)}\left(C_0\left(h(p_0)e^{-\lambda p_0} + \int_{p_0}^{p} h'(p)e^{-\lambda p}dp\right) + \right. \\ \left. + W_0 h(p_0)e^{-\lambda p_0}\right), \tag{1}$$

где $\lambda = (f'/f)E\omega/(1-\omega)$, $\omega = \sigma/\sigma_0$, σ_0 — эйлерово критическое напряжение упругого стержня. При вывод использовано уравнение равновесия стержня

$$\int_{\Omega} \Delta\sigma z d\Omega = -T\Delta v, \tag{2}$$

(T — приложенная к стержню продольная сжимающая сила, Δv — приращение прогиба, Ω — площадь сечения), гипотеза плоских сечений

$$\Delta\varepsilon = z(\Delta v_{,yy} - \Delta v_{0,yy}), \tag{3}$$

и представление

$$\Delta v = U(p)\sin\mu y, \quad \Delta v_0 = C_0 \sin\mu y, \quad \Delta w = W(p)\sin\mu y, \tag{4}$$

где, следуя [1], v_0 — начальный прогиб (несовершенство изготовления), w — начальный прогиб, вызванный неоднородной по сечению ползучестью. Зависимость (1) позволяет оценить поведение прогиба стержня после возмущения. Вычислим скорость прогиба

$$\dot{U} = \frac{\dot{p}e^{\lambda p}}{(1-\omega)h(p)}\left[(\lambda - k)\left(C_0\left(h(p_0)e^{-\lambda p_0} + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + \int_{p_0}^{p} h'(p)e^{-\lambda p}dp\right) + W_0 h(p_0)e^{-\lambda p_0}\right) + C_0 h'(p)e^{-\lambda p}\right], \tag{5}$$

где

$$k(p) = h'(p)/h(p). \tag{6}$$

В начале возмущенного движения при $p = p_0$, имеем скорость

$$\dot{U}(p_0) = \dot{p}_0 \frac{C_0\lambda + W_0(\lambda - k)}{1-\omega}. \tag{7}$$

Если стержень не имеет начального прогиба, то $C_0 = 0$. При этом предположении квазистатический критерий [1] в силу (7) при $\dot{U}(p_0) = 0$ выделяет как критическую точку

$$\lambda = k. \tag{8}$$

При $\lambda - k < 0$ (т. е. до достижения критической точки), прогиб через некоторое время после возмущения убывает до значения U_{min}, которое достигается при $\lambda = k$, а затем опять растет. Если возмущение возникает после критической точки, определяемой равенством $\lambda = k$, то прогиб растет сразу же. В авторском изложении критерия возмущенное движение реализовалось в результате снятия (а не приложения) некоторой внешней нагрузки. Еще раньше критерий (8) в иной форме был предложен *Ильюшиным А. А.* [2, 3].

Рассмотрим критерий *Куршина Л. М.* [5]. Пользуясь уже полученной зависимостью прогиба стержня от времени (1), вычислим ускорение прогиба при $p = p_0$. Дифференцируя (5), получим

$$\ddot{U}(p_0) = p_0^2 \frac{C_0\lambda(\lambda - 2k) + W_0(\lambda^2 - 3k\lambda + 2k^2 - k')}{1 - \omega}, \tag{9}$$

где $k' = dk/dp$. Функции $k(p)$ и $k'(p)$, входящие в (9), вычислены при $p = p_0$. Задавая начальные условия $C_0 \neq 0$, $W_0 = 0$ (начальная деформация ползучести отсутствует), получим условный критерий, связанный с обращением в нуль ускорения возмущенного движения. Соответствующее значение λ обозначим λ_1. До достижения критической точки $\lambda_1 = 2k$ прогиб растет замедленно, после — ускоренно. Аналогично, задавая начальные условия $C_0 = 0$, $W_0 \neq 0$, получим другой критерий, также связанный с ускорением. Для параметров критического напряженно-деформированного состояния имеем уравнение

$$\lambda^2 - 3k\lambda + 2k^2 - k' = 0. \tag{10}$$

Из двух решений этого уравнения имеет смысл как критическое (в смысле критерия [5]) лишь то, при котором знак кривизны меняется с минуса на плюс — кривая прогиба более резко идет вверх. Учитывая то, что $k > 0$, найдем

$$\lambda_2 = \frac{3k + \sqrt{k^2 + 4k'}}{2}. \tag{11}$$

Возможны и другие начальные условия. Например, $W_0 = -C_0$ (начальная деформация ползучести компенсирует начальный прогиб, т. е. $U(p_0) = 0$ — стержень в момент возмущения прямой). Отсюда, имеем

$$k\lambda_3 - 2k^2 + k' = 0. \tag{12}$$

Три условных критических точки λ_1, λ_2, λ_3 (вторая в оригинальных работах [4, 5] не упомянута) не ограничивают всех возможных вариантов. Каждая из таких точек связана со своими начальными условиями и имеет определенный физический смысл.

3 Обобщение квазистатического критерия на высшие производные

Прогиб, его скорость и ускорения, а также их экстремальные или нулевые значения наглядно показывают характер поведения конструкции, и на этой основе можно предсказывать некоторые условно критические ситуации, в частности, это точки λ_1, λ_2, λ_3. Однако, с математической точки зрения обращение в нуль одной из высших производных прогиба в начале возмущенного движения также является некоторой особой точкой на оси времени (деформации ползучести). Вычислим производные [6]

$$U^{(N)}(p_0) = \dot{p}_0^N (C_0 D_N + W_0 B_N)/(1-\omega), \quad N = 0, 1, 2..., \tag{13}$$

где D_N и B_N — некоторые функции переменной p, которые можно представить в виде полиномов по λ. При $N = 1$ и $N = 2$ их вид следует из (7), (9). Аналогично получаются полиномы и для больших значений N. Приведем несколько полиномов

$$\begin{aligned}
&D_0 = 1,\\
&D_1 = \lambda,\\
&D_2 = \lambda(\lambda - 2k),\\
&D_3 = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda k + 3(2k^2 - k')),\\
&D_4 = \lambda(\lambda^3 - 9\lambda^2 k + \lambda(26k^2 - 9k') + 4(7k'k - k'' - 6k^3)),
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1,\\
&B_1 = \lambda - k,\\
&B_2 = \lambda^2 - 3\lambda k + 2k^2 - k',\\
&B_3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 k + \lambda(11k^2 - k') + 7k'k - k'' - 6k^3,\\
&B_4 = \lambda^4 - 10\lambda^3 k + 5\lambda^2(7k^2 - 2k') + 5\lambda(9kk' -\\
&\qquad - k'' - 10k^2) + 7k'^2 - 46k'k^2 + 11k''k - k''' + 24k^4.
\end{aligned} \tag{15}$$

Полиномы D_N и B_N строятся по рекуррентным формулам

$$D_N = \lambda D_{N-1} - \sum_{i=1}^{N-1} D_i C_i^N F_{N-i}, \quad N = 2, 3.., \tag{16}$$

$$B_N = \lambda B_{N-1} - \sum_{i=0}^{N-1} B_i C_i^N F_{N-i}, \quad B_0 = 1, \; N = 1, 2, 3..., \tag{17}$$

где
$$C_i^N = N!/(i!(N-i)!) \tag{18}$$
— биноминальные коэффициенты. Функции F_N введены следующими соотношениями
$$\begin{aligned} &F_1 = k, \quad F_2 = k', \quad F_3 = k'' - kk', \\ &F_4 = k''' - 3k''k - k'^2 + 2k^2k', \\ &F_5 = k^{(4)} - 5k'k'' - 6kk''' + 7k'^2k + 11k^2k'' - 6k^3k', ... \\ &F_{N+1} = F'_N - (N-1)F_NF_1, \; N = 1, 2, .., \end{aligned} \tag{19}$$

Корни полиномов D_N и B_N обозначим соответственно $\lambda_{D,N}$ и $\lambda_{B,N}$. Они являются обобщением критериев λ_1 и λ_2. Таким образом, $\lambda_{D,2} = \lambda_1$, $\lambda_{B,2} = \lambda_2$. Имеем выражения
$$\lambda_{D,2} = 2k, \; \lambda_{D,3} = \left(5k \pm \sqrt{k^2 + 12k'}\right)/2, \tag{20}$$
$$\lambda_{B,1} = k, \; \lambda_{B,2} = \left(3k \pm \sqrt{k^2 + 4k'}\right)/2. \tag{21}$$

Аналогично обобщается критерий λ_3, получаемый при начальных условиях $W_0 = -C_0$. Подставляя это соотношение между начальными амплитудами в (13), получим
$$U^{(N)}(p_0) = \dot{p}_0^{(N)}C_0H_N/(1-\omega), \tag{22}$$
где $H_N = D_N - B_N$ полиномы переменной λ имеют степень на единицу меньшую, чем D_N и B_N. Выпишем несколько первых полиномов
$$\begin{aligned} &H_1 = k, \\ &H_2 = \lambda k + k' - 2k^2, \\ &H_3 = \lambda^2 k + \lambda(k' - 5k^2) - 7kk' + k'' + 6k^3, \\ &H_4 = \lambda^3 k + \lambda^2(k' - 9k^2) + \lambda(26k^3 + k'' - 17k'k) - 7k' + \\ &\qquad\qquad + 46k'k^2 - 11k''k + k''' - 24k^4. \end{aligned} \tag{23}$$

Полиномы H_N образуются по рекуррентной формуле
$$H_N = F_N + \lambda H_{N-1} - \sum_{i=1}^{N-1} H_i C_i^N F_{N-i}, \quad N = 2, 3... \tag{24}$$

Корни полиномов H_2 и H_3 имеют аналитические выражения
$$\begin{aligned} &\lambda_{H,2} = 2k - k'/k, \\ &\lambda_{H,3} = \left(5k - k'/k \pm \sqrt{(k'/k)^2 + 18k' - 4k''/k + k^2}\right)/2. \end{aligned} \tag{25}$$

В качестве критических выбираются те корни, при которых производная меняет знак с минуса на плюс. Для полиномов B_{2N}, D_{2N+1} и H_{2N+1} это будут четные корни, для B_{2N+1}, D_{2N}, H_{2N} — нечетные.

Таким образом, получены полиномы произвольных порядков, определяющие своими корнями особые точки на шкале времени. Действительно, соотношение типа $\lambda \sim k$ дает связь напряжений в критический момент и деформаций, а зависимость деформации от времени получается из первого интеграла определяющего соотношения.

Корни полиномов B_N соответствуют особым точкам начальной задачи для возмущений прогиба (критерий нестабильности [7, 8]).

Список литературы

[1] *Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести//ПММ. 1957. Т.21. №3. С. 406 – 412.

[2] *Ильюшин А. А.* Деформация вязкопластического тела//Уч.записки МГУ. Механика. 1940. №39. С. 3 – 81.

[3] *Клюшников В. Д.* Три идеи А. А. Ильюшина; трактовка и современное значение//Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин.: Калинин. ун-т, 1986. С. 34 – 41.

[4] *Куршин Л. М.* Об устойчивости стержней и пластин в условиях ползучести//ДАН СССР. 1961. Т. 140, №3. С. 549 – 552.

[5] *Куршин Л. М.* Устойчивость при ползучести//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. №3. С. 125 – 160.

[6] *Кирсанов М. Н.* Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести//ПМТФ. 1993. №2. С. 152 – 156.

[7] *Кирсанов М. Н., Клюшников В. Д.* Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести //Изв. РАН. МТТ. 1993. №3. С. 144 – 150.

[8] *Кирсанов М. Н.* Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела ПМТФ. 2013. №3. С.166-169.