

бывает не всегда и все зависит от выбора начальной точки. Возьмем для сравнения с уже полученным результатом начальную точку не на оси симметрии, а, например, в точке C' . Оставляя полюс в той же точке — в центре изгиба A , построим эпюру секториальных площадей (рис. 187).

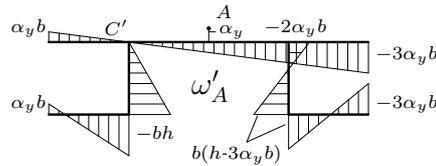


Рис. 187

Эпюра получилась несимметричной, и ее площадь отлична от нуля

$$S_{\omega_A} = \int_F \omega dF = -2\alpha_y(2b^2\delta_1 + b\delta_2(b+h)) = -16919,5 \text{ см}^4.$$

Найдем константу D :

$$D = \frac{S_{\omega_A}}{F} = -\frac{2\alpha_y(2b^2\delta_1 + b\delta_2(b+h))}{2(2b\delta_1 + \delta_2(b+h))} = -b\alpha_y = -74,86 \text{ см}^2.$$

Если теперь вычесть полученную константу из ординат эпюры ω_A на рис. 187, то получится прежняя эпюра главных секториальных площадей (рис. 185).

Marple - программа определения секториального момента инерции приведена на с. 237.

4.5. Тонкостенные стержни открытого профиля

Задача 49. К тонкостенному стержню открытого профиля приложен крутящий момент $M = 1 \text{ Нм}$ (рис. 188). Найти относительный угол закручивания θ и максимальное касательное напряжение. Модуль упругости материала $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Размеры даны в миллиметрах.

Решение

1. Разбиваем сечение на три длинных прямоугольника $s_1 = 42 \text{ мм}$, $\delta_1 = 1 \text{ мм}$, $s_2 = 15 \text{ мм}$, $\delta_2 = 2 \text{ мм}$, $s_3 = 22 \text{ мм}$, $\delta_3 = 1 \text{ мм}$ (рис. 189). Вычисляем геометрическую характеристику жесткости сечения

$$J_d = (1/3)(42 \cdot 1^3 + 15 \cdot 2^3 + 22 \cdot 1^3) = 61,33 \text{ мм}^4. \quad (4.34)$$

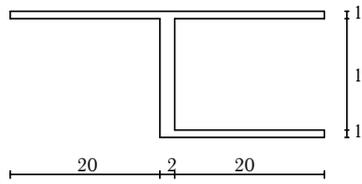


Рис. 188

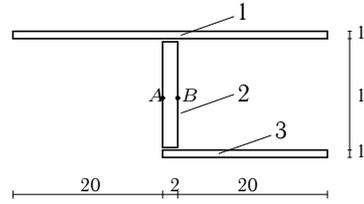


Рис. 189

2. Вычисляем относительный угол закручивания стержня. Модуль сдвига материала ¹ где $G = 0,7 \cdot 10^{11} / (2(1 + 0,3)) = 0,269 \cdot 10^{11}$ Па. Имеем

$$\theta = 1 / (0,269 \cdot 10^{11} \cdot 61,33 \cdot 10^{-12}) = 0,605 \text{ рад.} \quad (4.35)$$

3. Вычисляем максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = 1 \cdot 0,002 / (61,33 \cdot 10^{-12}) = 0,326 \cdot 10^8 \text{ Па} = 32,6 \text{ МПа.} \quad (4.36)$$

Максимальное касательное напряжение наблюдается в точках A и B, рис. 189.

Замечание 1. Для замкнутого тонкостенного профиля постоянной толщины δ формулы для расчета относительного угла закручивания и касательного напряжения имеют вид

$$\theta = Ms / (4GA_*^2\delta), \quad \tau_{max} = M / (2A_*\delta). \quad (4.37)$$

где A_* — площадь сечения, ограниченная средней линией замкнутого контура, s — длина контура.

Замечание 2. Открытый тонкостенный профиль плохо сопротивляется кручению. В этом можно убедиться, если сравнить полярный момент инерции круглого вала той же площади, что и в рассмотренном примере. Вычисляем площадь сечения на рис. 188 $A = 1 \cdot 42 + 15 \cdot 2 + 22 \cdot 1 = 94 \text{ мм}^2$. Из равенства площадей круглого сечения и тонкостенного $\pi d^2 / 4 = 94$ получаем диаметр вала сравнения $d = 10,94 \text{ мм}$. Для этого вала полярный момент инерции равен $\pi \cdot 10,94^4 / 32 = 1406,29 \text{ мм}^4$, что в 23 раза больше, чем аналогичная величина для тонкостенного профиля. Еще больший эффект получается от применения замкнутого тонкостенного профиля.

Задача 50. Тонкостенный стержень открытого профиля длиной $l = l_1 + l_2$ жестко заделан на одном конце. На стержень действуют продольные силы P_1, P_2 , и крутящий момент M . Найти угол поворота сечения стержня при $z = 400$ мм, координата z отсчитывается от

¹Алюминий или алюминиевый сплав.

заделки. Даны размеры: $b = 30$ мм, $h = 20$ мм, $l_1 = 500$ мм, $l_2 = 400$ мм, нагрузки $P_1 = 100$ Н, $P_2 = 200$ Н, $M_0 = 3$ Нм, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Толщина стенки равна 1 мм.

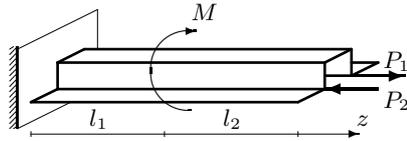


Рис. 190

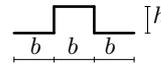


Рис. 191

Решение

1. Строим эпюру главных секториальных площадей сечения ω (мм²).

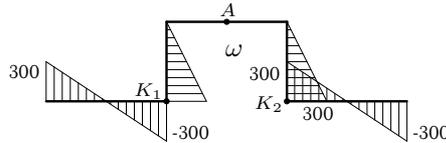


Рис. 192

Центр изгиба располагается в точке A .

2. Определяем секториальный момент инерции сечения J_ω . Умножаем эпюру ω саму на себя. Интеграл берем по правилу Верещагина. Учитываем симметрию:

$$J_\omega = \int \omega^2 dF = 2\delta \left(\left(\frac{300}{2} \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 300 \right) + 2 \cdot \frac{300}{2} \cdot 30 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 300 - \frac{1}{3} \cdot 300 \right) \right) = 3 \cdot 10^6 \text{ мм}^6 = 3 \text{ см}^6.$$

3. Вычисляем геометрическую характеристику жесткости сечения. Толщина на всех участках одинаковая: $\delta = 1$ мм. Получаем

$$J_d = (1/3) \sum_{k=1}^5 s_k \delta_k^3 = (1/3) \cdot 1 \cdot (30 + 20 + 30 + 20 + 30) = 43,33 \text{ мм}^4.$$

4. Находим параметр изгибно-крутильную характеристику стержня $k = \sqrt{GJ_d/(EJ_\omega)}$. Так как модуль сдвига имеет вид $G = E/(2(1 + \nu))$,

то

$$k = \sqrt{\frac{J_d}{2(1+\nu)J_\omega}} = \sqrt{\frac{43,33 \cdot 10^{-12}}{2(1+0,3)3 \cdot 10^{-12}}} = \sqrt{5,555} = 2,357 \text{ м}^{-1}.$$

5. Выделяем на стержне два участка $0 \leq z \leq l_1$, $l_1 \leq z \leq l$, разделенных точкой приложения внешнего момента M . На первом участке удельный угол закручивания обозначим θ_1 , на втором — θ_2 .

6. Записываем дифференциальное уравнение для удельного угла закручивания θ на участках

$$\begin{aligned} \theta_{1,zz} - k^2\theta_1 &= -k^2M_z/(GJ_d), \\ \theta_{2,zz} - k^2\theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $M_z = M_0$. Момент положительный, так как он направлен в ту же сторону, куда отсчитываются положительные секториальные площади, если смотреть с конца оси z , т.е. по часовой стрелке. На втором участке внешних моментов справа от участка нет, уравнение получается однородным. Вычислим правую часть первого уравнения

$$k^2M_z/(GJ_d) = 5,555 \cdot 3/(0,769 \cdot 10^{11} \cdot 0,433 \cdot 10^{-10}) = 5 \text{ м}^{-3}$$

7. Определяем бимомент, возникающий от действия продольных сил на конце стержня

$$B = \omega_1 P_{1,z} + \omega_2 P_{2,z} = 300 \cdot 100 + (-300) \cdot (-200) = 90000 \text{ Нмм}^2 = 0,09 \text{ Нм}^2.$$

8. Интегрируем¹ дифференциальные уравнения (4.38):

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= C_1 \text{sh}(kz) + C_2 \text{ch}(kz) + M_0/(GJ_d), \\ \theta_2(z) &= C_3 \text{sh}(kz) + C_4 \text{ch}(kz). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Константы интегрирования определяем из условий на концах стержня

$$\theta_{2,z}(l) = -B/(EJ_\omega), \quad \theta_1(0) = 0, \quad (4.40)$$

и условий сопряжения при $z = l_1$

$$\theta_{1,z}(l_1) = \theta_{2,z}(l_1), \quad \theta_1(l_1) = \theta_2(l_1). \quad (4.41)$$

Для определения констант потребуются производные:

$$\begin{aligned} \theta_{1,z}(z) &= kC_1 \text{ch}(kz) + kC_2 \text{sh}(kz), \\ \theta_{2,z}(z) &= kC_3 \text{ch}(kz) + kC_4 \text{sh}(kz). \end{aligned} \quad (4.42)$$

¹Решение можно искать также в виде $\theta_1(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} + M_0/(GJ_d)$, $\theta_2(z) = C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}$.

Подставляем (4.40) и (4.41) в (4.39) и (4.42), получаем систему уравнений для констант C_1, C_2, C_3, C_4

$$\begin{aligned} 9,97C_3 + 9,69C_4 + 0,15 &= 0, \\ C_2 + 0,90 &= 0, \\ 4,19C_1 + 3,47C_2 - 4,19C_3 - 3,47C_4 &= 0, \\ 1,47C_1 + 1,78C_2 - 1,47C_3 - 1,78C_4 + 0,9 &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Решаем систему (4.43). Находим константы интегрирования $C_1 = 0,63, C_3 = -0,69, C_4 = 0,7, C_2 = -0,9$.

9. Вычисляем угол поворота в сечении $z = l_3$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^{l_3} \theta dz = (1/k)(C_1 \operatorname{sh}(kz) + C_2 \operatorname{ch}(kz)) + zM_0/(GJ_d) \Big|_0^{l_3} = \\ &= (1/k)(C_1 \operatorname{sh}(kl_3) + C_2(\operatorname{ch}(kl_3) - 1)) + l_3M_0/(GJ_d) = 0,07166 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Maple-программа интегрирования дифференциального уравнения кручения тонкостенного стержня приведена на с. 240.

4.6. Напряжения и деформации

Задача 51. К треугольной пластине (рис. 194) с заданными размерами $AB = 10$ см, $BC = 7$ см, приложены напряжения в МПа. Из условия равновесия пластины найти недостающие напряжения, проверить ее прочность, узнать деформации пластины и смещения ее вершин. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, нормативное сопротивление $R_n = 100$ МПа, модуль упругости $E = 2$ ГПа, коэффициент запаса прочности $[k_{пч}] = 1$.

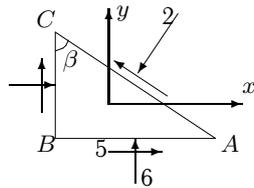


Рис. 193

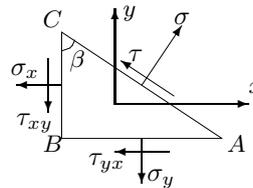


Рис. 194

Решение

1. В соответствии с правилом знаков на рис. 194 получаем величины напряжений на площадках $\sigma_y = -6$ МПа, $\tau_{xy} = -5$ МПа, $\sigma = -2$ МПа. По закону парности $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Неизвестными являются касательное