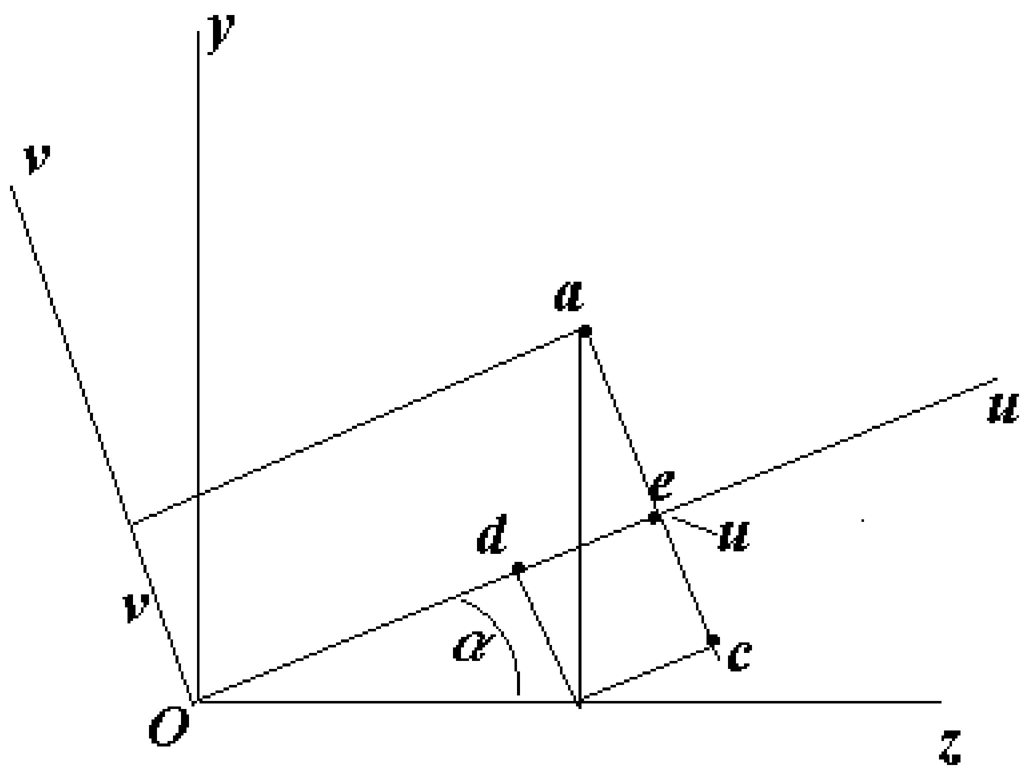
По книге А.Горшкова, В. Трошина, В.Шалашилина. Сопротивление материалов. 2002.

Изменение моментов инерции при повороте осей координат. Положение главных осей инерции

Поворот осей на угол α

$$u = Od + de = z\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$v = ac - ce = y\cos\alpha - z\sin\alpha.$$



Моменты инерции в новых осях

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 dF =$$

$$= \cos^2\alpha \int_F y^2 dF - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F zy dF + \sin^2\alpha \int_F z^2 dF =$$
$$= J_z \cos^2\alpha - 2J_{zy}\sin\alpha\cos\alpha + J_y \sin^2\alpha.$$

$$J_v = J_z \sin^2\alpha + 2J_{zy}\sin\alpha\cos\alpha + J_y\cos^2\alpha.$$
$$J_{uv} = (J_z - J_y)\sin\alpha\cos\alpha + J_{zy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Преобразуем, используя формулы

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\ \ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$
$$J_u = \frac{1}{2}(J_z + J_y) + \frac{1}{2}(J_z - J_y)\cos 2\alpha - J_{zy}\sin 2\alpha,$$
$$J_v = \frac{1}{2}(J_z + J_y) - \frac{1}{2}(J_z - J_y)\cos 2\alpha + J_{zy}\sin 2\alpha,$$
$$J_{uv} = \frac{1}{2}(J_z - J_y)\sin 2\alpha + J_{zy}\cos 2\alpha.$$

При

$$tg 2\alpha_0 = -2J_{zy}/(J_z - J_y)$$

J_{uv} обращается в 0.

Для определения α_* приравниваем нулю производные

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = 0,\ \ \frac{dJ_v}{d\alpha} = 0$$
$$-(J_z - J_y)\sin 2\alpha_* - J_{zy}\cos 2\alpha_* = 0.$$
$$tg 2\alpha_* = -2J_{zy}/(J_z - J_y)$$

$$\sin 2\alpha_* = tg\alpha_*/\sqrt{1 + tg^2\alpha_*},\ \ \cos 2\alpha_* = 1/\sqrt{1 + tg^2\alpha_*}$$
$$\sin 2\alpha_* = J_{zy}/\sqrt{\frac{1}{4}(J_z - J_y)^2 + J_{zy}^2}$$
$$\cos 2\alpha_* = \frac{1}{2}(J_y - J_z)/\sqrt{\frac{1}{4}(J_z - J_y)^2 + J_{zy}^2}$$

Минимальный и максимальный моменты инерции

$$J_* = \frac{1}{2}(J_y + J_z) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(J_z - J_y)^2 + J_{zy}^2}$$