

Таблица 1

$k$	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	4.000	8.000	10.00	999.0
$\beta(k)$	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.307	0.312	0.333

5. Находим суммарный момент сил, приложенных к брусу относительно осей координат в заданном сечении.

6. Нормальные напряжения в точке  $O_k$  заделки определяем по формуле

$$\sigma_{O_k} = -M_x z_{O_k} / J_x + M_z x_{O_k} / J_z + N / F, \quad (6.4)$$

где  $z_{O_k}$  и  $x_{O_k}$  — координаты точки  $O_k$ ,  $N = \sum_i P_{iy}$ ,  $M_x$  и  $M_z$  — нормальная сила и моменты в заданном сечении,.

7. Строим эпюру крутящих моментов по длине бруса (см. с. 29).

8. Определяем угол поворота концевого сечения вокруг оси  $y$

$$\varphi_y = \sum_{i=1}^3 M_{yi} l_i / (G J_k), \quad (6.5)$$

где  $l_i$  — длины участков,  $M_{yi}$  — крутящие моменты на этих участках.

**Пример.** На консольно закрепленный брус действуют силы  $P_1 = 60$  кН,  $P_2 = 80$  кН,  $P_3 = 50$  кН,  $P_4 = 100$  кН параллельные его ребрам (рис. 81). Найти нормальные напряжения в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  заделки бруса и угол осевого поворота концевого сечения бруса. Размеры даны в сантиметрах. Модуль сдвига  $G = 0.8 \cdot 10^5$  МПа.

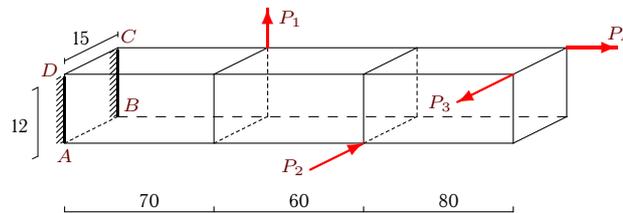


Рис. 81

### Решение

1. Выбираем оси координат, помещая начало координат в центр тяжести сечения в заделке и направляя оси вдоль ребер бруса (рис. 82). Определяем координаты точек приложения сил:  $K_1(-7.5, 70, 6)$ ,  $K_2(7.5, 130, -6)$ ,  $K_3(7.5, 130, -6)$ ,  $K_4(-7.5, 210, 6)$ .

2. Находим моменты главные инерции сечения бруса. Для прямоугольного сечения имеем  $J_x = bh^3/12 = 15 \cdot 12^3/12 = 2160$  см<sup>4</sup>,  $J_z = hb^3/12 = 12 \cdot 15^3/12 = 3375$  см<sup>4</sup>.

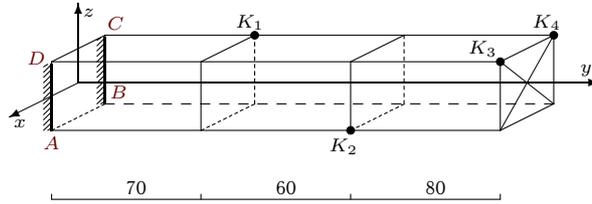


Рис. 82

3. Определяем площадь сечения  $F = hb = 180 \text{ см}^2$ .

4. Вычисляем геометрический фактор жесткости сечения на кручение. Для прямоугольного сечения ( $h < b$ ) имеем  $J_k = \beta(k)bh^3$ , где коэффициент  $\beta(k)$  зависит от отношения  $k = b/h$ , которое в рассматриваемом случае равно  $k = 15/12 = 1.25$ . Значение  $\beta$  получаем линейной интерполяцией по таблице 1:

$$\beta(1.25) = 0.141 + (1.25 - 1)(0.196 - 0.141)/(1.5 - 1) = 0.1685.$$

Более точное значение  $\beta = 0.1717$  можно найти, воспользовавшись программой 7, с. 259, В итоге имеем

$$J_k = 0.1685 \cdot 0.15 \cdot 0.12^3 = 4367.52 \text{ см}^4.$$

5. Находим момент сил, приложенных к брусу относительно осей координат<sup>1</sup>. Пользуемся формулами<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} M_x &= yP_z - zP_y, \\ M_y &= zP_x - xP_z, \\ M_z &= xP_y - yP_x. \end{aligned} \quad (6.6)$$

С учетом значений  $P_{1z} = 60 \text{ Н}$ ,  $P_{2x} = -80 \text{ Н}$ ,  $P_{3x} = 50 \text{ Н}$ ,  $P_{4y} = 100 \text{ Н}$ , получаем моменты в заделке

$$\begin{aligned} M_x &= 60 \cdot 0.7 - 100 \cdot 0.06 = 36 \text{ кНм}, \\ M_y &= 60 \cdot 0.075 + 80 \cdot 0.06 + 50 \cdot 0.06 = 12.3 \text{ кНм}, \\ M_z &= 80 \cdot 1.3 - 50 \cdot 2.1 - 100 \cdot 0.075 = -8.5 \text{ кНм}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

<sup>1</sup>Если по условию задачи необходимо найти нормальные напряжения не в основании бруса, а в каком-либо другом сечении, то оси координат лучше поместить в это сечение. Осевая координата заделки при этом будет отрицательной.

<sup>2</sup>Проекция вектора момента относительно начала координат:  $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{P} =$

$$= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}.$$

6. Нормальные напряжения в точке  $O_k$  заделки определяем по формуле (6.4). При  $x_A = 0.075$  м,  $z_A = -0.06$  м вычисляем нормальное напряжение

$$\begin{aligned}\sigma_A &= -36 \cdot 10^3 z_A / (2.16 \cdot 10^{-5}) - 8.5 \cdot 10^3 x_A / (3.375 \cdot 10^{-5}) + \\ &+ 100 \cdot 10^3 / 0.018 = 100 \cdot 10^6 - 18.889 \cdot 10^6 + 5.556 \cdot 10^6 = \\ &= 86.667 \cdot 10^6 \text{ Па} = 86.667 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Аналогично, подставляя пары координат  $x_B = -0.075$  м,  $z_B = -0.06$  м,  $x_C = -0.075$  м,  $z_C = 0.06$  м и  $x_D = 0.075$  м,  $z_D = 0.06$  м, получаем  $\sigma_B = 124.444$  МПа,  $\sigma_C = -75.555$  МПа,  $\sigma_D = -113.333$  МПа. По принятому правилу знаков, положительные напряжения соответствуют растяжению, отрицательные — сжатию.

7. Строим эпюру крутящих моментов по длине бруса (см. с. 29). Рассматривая моменты сил правее сечений  $y_2 = 70$  см и  $y_3 = 130$  см, по формуле  $M_y = zP_x - xP_z$  получаем

$$M_{y2} = 80 \cdot 0.06 + 50 \cdot 0.06 = 7.8 \text{ кНм}$$

$$M_{y3} = 50 \cdot 0.06 = 3.0 \text{ кНм}$$

Значение  $M_{y1}$  уже вычислено, это значение моментов всех сил, действующих на брус относительно оси  $y$  в заделке. Согласно (6.6),  $M_{y1} = 12.3$  кНм. Эпюра имеет вид

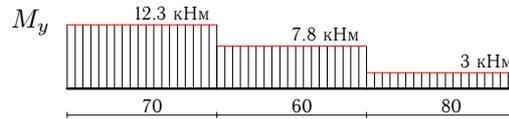


Рис. 83

8. Определяем угол поворота концевого сечения вокруг оси  $y$  по формуле (6.5)

$$\varphi_y = \frac{(12.3 \cdot 0.7 + 7.8 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.8) \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^{11} 4.367 \cdot 10^{-5}} = 4.491 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

**Условия задач.** На консольно закрепленный брус действуют три силы, параллельные его ребрам. Найти нормальные напряжения в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  заделки бруса и угол осевого поворота концевого сечения бруса. Размеры даны в сантиметрах, силы — в килоньютонах. Модуль сдвига  $G = 0.8 \cdot 10^5$  МПа.