Глава 6

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

6.1. Изогнутый стержень

Постановка задачи. *Участки изогнутого стержня параллельны осям координат. К стержню приложены сосредоточенные силы. Известны жесткость стержня на изгиб и жесткость на кручение. Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов. Определить перемещения заданной точки стержня, пренебрегая весом стержня и влиянием нормальных и перерезывающих сил. Найти угол поворота концевого сечения.*

План решения

1. Вводим систему координат. Последовательно нумеруем угловые точки стержня $k = 1, ..., n$, принимая за первую точку заделки. Определяем координаты точек.

2. Находим момент силы, приложенной к точке i относительно всех точек с меньшими номерами.

3. Повторяем предыдущий пункт для всех внешних сил, приложенных к стержню. Суммируем вектора моментов во всех точках. Получаем набор векторов $\vec{M}_k$, $k = 1, ..., n$.

4. Строим эпюры изгибающих моментов на сжатых волокнах стержня. Так для участка стержня, параллельного орту n_1, момент относительно оси с ортом n_2 откладывается вдоль оси с ортом n_3. Таким образом, в этой процедуре орты n_1, n_2, n_3 представляют полный набор ортов всех трех осей x, y и z. Положительное значение момента на эпюрах соответствует направлению главного вектора сил, образующих этот момент.

Момент относительно оси, параллельной участку является крутящим. Он откладывается на любом волокне стержня с указанием знака. Сила, образующая положительный момент, вращает сечение против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора нормали сечения.

5. Определяем перемещение конца стержня. Прикладываем к концу стержня единичную (безразмерную) силу по направлению искомого перемещения, т.е. вдоль $\vec{P}$. Определяем возникающие моменты $\vec{m}_k$, $k = 1, ..., n$.

6. По формуле Максвелла-Мора находим линейное перемещение по направлению силы $\vec{P}$

$$\delta_P = \int\limits_s \frac{M_k^{\text{изг}} m_k^{\text{изг}}}{EJ_x}\, ds + \int\limits_s \frac{M_k^{\text{кр}} m_k^{\text{кр}}}{GJ_0}\, ds, \tag{6.1}$$

где EJ_x — жесткость на изгиб, GJ_0 – жесткость на кручение. Принято симметричное сечение стержня: $EJ_x = EJ_y$. Так обе функции $M_k(s)$ и $m_k(s)$ линейные, то предыдущая формула допускает точное интегрирование по формуле трапеций:

$$\begin{aligned} \delta_P = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} l_k(2M_{k,j}m_{k,j} + 2M_{k+1,j}m_{k+1,j} + M_{k,j}m_{k+1,j} + \\ + M_{k+1,j}m_{k,j})/(6C_{q_k,j}), \end{aligned} \tag{6.2}$$

где l_k — длина участка k, q_k — направляющий орт участка. Момент имеет два индекса. Первый k или $k+1$ указывает номер точки, второй индекс j — компонента момента 1, 2, 3 или, что то же x, y, z. Константы $C_{q_k,j}$ образуют матрицу

$$\begin{vmatrix} GJ_0 & EJ_x & EJ_x \\ EJ_x & GJ_0 & EJ_x \\ EJ_x & EJ_x & GJ_0 \end{vmatrix}.$$

7. Находим угол поворота концевого сечения вокруг оси последнего участка. Прикладываем к этому сечению единичный момент и находим моменты $\vec{m}_k$, $k = 1, ..., n$ на участках стержня. Все эпюры имеют форму прямоугольников высотой 1. Подставляя $\vec{m}_k$ в (6.1), получаем угол поворота сечения. Учитывая, что $m_{k,j} = m_{k+1,j} = 1$ имеем упрощение для формулы (6.2):

$$\varphi_P = \sum_{k=1}^{n} l_k(M_{k,q_n} + M_{k+1,q_n})/(2C_{q_k,q_n}), \tag{6.3}$$

где q_n орт последнего участка.

Пример. Участки изогнутого стержня параллельны осям координат. К стержню приложены силы $F = 5$ кН и $P = 3$ кН, (рис. 104). Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов.

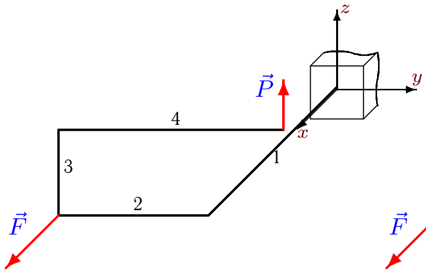


Рис. 104

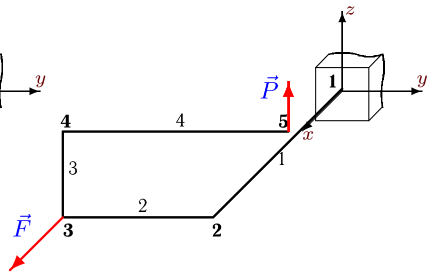


Рис. 105

Определить перемещения конца стержня (в см) по направлению действия силы P, пренебрегая весом стержня и влиянием нормальных и перерезывающих сил. Найти угол поворота концевого сечения относительно оси участка 4. Принять жесткость на изгиб $EJ_x = EJ_y = 9.8 \cdot 10^5$ Нм^2, на кручение $GJ_0 = 7.6 \cdot 10^5$ Нм^2. Даны длины участков: $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$ м, $l_3 = 1$ м, $l_4 = 3$ м [1].

Решение

1. Вводим систему координат. Последовательно нумеруем угловые точки стержня $k = 1, \ldots, 5$, принимая за первую точку заделки. Определяем координаты точек как компоненты радиусов-векторов: $\vec{R}_1 = (0,0,0)$, $\vec{R}_2 = (2,0,0)$, $\vec{R}_3 = (2,-2,0)$, $\vec{R}_4 = (2,-2,1)$, $\vec{R}_5 = (2,1,1)$.

2. Находим момент силы P, приложенной к точке 5 относительно точек 1, 2, 3, 4 как векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы относительно k-й точки стержня на вектор силы: $\vec{M}_k^P = (\vec{R}_5 - \vec{R}_k) \times \vec{P}$. Индекс P указывает, что момент происходит от силы P. Раскрывая векторное произведение получаем

$$\vec{M}_1^P = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично,

$$\vec{M}_2^P = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{M}_3^P = \vec{M}_4^P = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[1]Жесткость стержня рассчитана для круглого стального сечения радиусом $r = 0.05$ м. Модуль упругости стали принят $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Отсюда $EJ_x = E\pi r^4/4 = 9.817 \cdot 10^5$ Нм^2, $G = E/(2(1+\nu)) = 0.769 \cdot 10^{11}$ Па, $GJ_0 = G\pi r^4/2 = 7.552 \cdot 10^5$ Нм^2.

3. Повторяем предыдущий пункт для силы $\vec{F}$, приложенной к точке 3 стержня: $\vec{M}_k^F = (\vec{R}_3 - \vec{R}_k) \times \vec{F}$. Индекс P указывает, что момент происходит от силы $\vec{F}$.

$$\vec{M}_1^F = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \; \vec{M}_2^F = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Моменты в остальных точках от действия $\vec{F}$ принимаем равными нулю. Суммируем вектора моментов во всех точках $\vec{M}_k = \vec{M}_k^P + \vec{M}_k^F$, $k = 1, ..., 5$. Получаем набор векторов

$$\vec{M}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}, \; \vec{M}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \; \vec{M}_3 = \vec{M}_4 = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Строим эпюры изгибающих (рис. 106) и крутящих (рис. 107) моментов на сжатых волокнах стержня

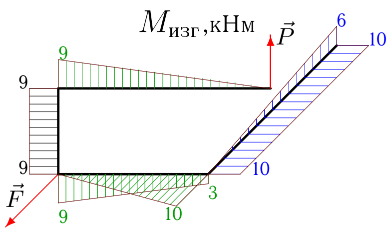


Рис. 106

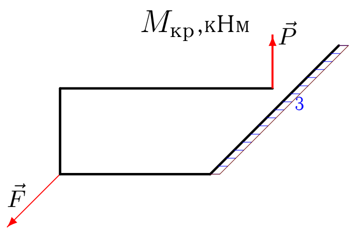


Рис. 107

5. Определяем перемещение конца стержня. Прикладываем к концу стержня единичную (безразмерную) силу по направлению искомого перемещения, т.е. вдоль $\vec{P}$. Определяем возникающие моменты

$$\vec{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \vec{m}_3 = \vec{m}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Строим эпюры изгибающих (рис. 108) и крутящих (рис. 109) моментов на сжатых волокнах стержня

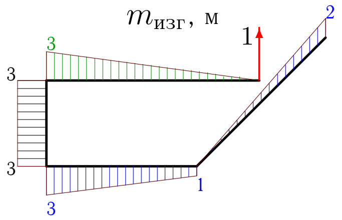


Рис. 108

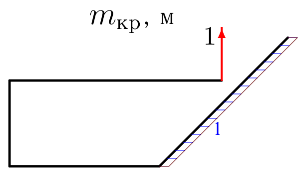


Рис. 109

6. По формуле Максвелла-Мора (6.1) находим линейное перемещение по направлению силы $\vec{P}$. Интеграл вычисляем по формуле трапеций (6.2). Так как ординаты эпюры моментов от действия внешних нагрузок измеряются в кНм, то жесткости на изгиб и кручения также переведем в кНм^2: $EJ_x = 9.8 \cdot 10^2$ кНм^2, $GJ_0 = 7.6 \cdot 10^2$ кНм^2. Получим:

$$\begin{aligned}
\delta_P = {} & l_1\,(2\cdot 6\cdot 2/(6EJ_x) + (2\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1)/(6GJ_o)) + \\
& + l_2(2\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 9\cdot 3 + 3\cdot 3 + 9\cdot 1)/(6EJ_x) + \\
& + l_3(2\cdot 9\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 9 + 3\cdot 9 + 9\cdot 3)/(6EJ_x) + \\
& + l_4\cdot 2\cdot 9\cdot 3/(6EJ_x) = \\
& = (1.606 + 2.653 + 2.755 + 2.755)\cdot 10^{-2} = 9.769\cdot 10^{-2}\text{м} = 9.769 \text{ см}.
\end{aligned}$$

7. Находим угол поворота концевого сечения вокруг оси последнего участка. Прикладываем к этому сечению единичный момент, направленный по оси последнего участка, т.е. вдоль оси y и находим моменты $\vec{m}_k$, $k = 1, ..., 5$ на участках стержня.

$$\vec{m}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ k = 1, ..., 5.$$

Строим эпюры изгибающих (рис. 110) и крутящих (рис. 111) моментов на сжатых волокнах стержня. Все эпюры имеют форму прямоугольников высотой 1

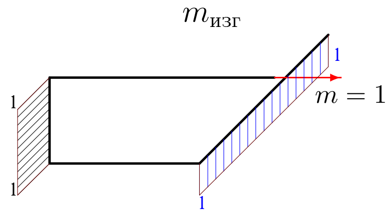


Рис. 110

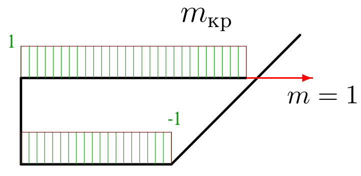
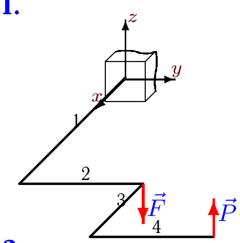


Рис. 111

Подставляя $\vec{m}_k$ в (6.3), получаем угол поворота сечения $\varphi_P = -2 \cdot 6/(2EJ_x) = -0.612 \cdot 10^{-2}$ рад. Ненулевое значение интеграл Максвелла-Мора в этой задаче принимает только на первом участке.

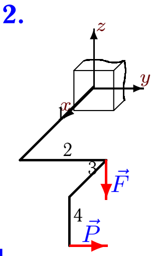
Условия задач. *Участки изогнутого стержня параллельны осям координат. К стержню приложены силы F и P. Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов. Определить перемещения конца стержня (в см) по направлению действия силы P, пренебрегая весом стержня и влиянием нормальных и перерезывающих сил. Найти угол поворота концевого сечения относительно оси участка 4. Принять жесткость на изгиб $EJ_x = EJ_y = 9.8 \cdot 10^5$ $Нм^2$, на кручение $GJ_0 = 7.6 \cdot 10^5$ $Нм^2$.*

1.



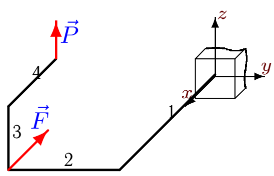
$l_1 = 2$ м,
$l_2 = 2$ м,
$l_3 = 1$ м,
$l_4 = 2$ м,
$P = 1$ кН,
$F = 2$ кН.

2.



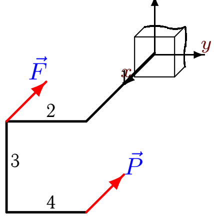
$l_1 = 2$ м,
$l_2 = 2$ м,
$l_3 = 1$ м,
$l_4 = 1$ м,
$P = 3$ кН,
$F = 2$ кН.

3.



$l_1 = 2$ м,
$l_2 = 2$ м,
$l_3 = 1$ м,
$l_4 = 1$ м,
$P = 2$ кН,
$F = 3$ кН.

4.



$l_1 = 2$ м,
$l_2 = 2$ м,
$l_3 = 2$ м,
$l_4 = 2$ м,
$P = 1$ кН,
$F = 2$ кН.