затем абсолютные

$$\varphi_4 = 0.365 \cdot 10^{-3},$$
$$\varphi_3 = (-0.879 + 0.365) \cdot 10^{-3} = -0.515 \cdot 10^{-3},$$
$$\varphi_2 = (4.370 - 0.879 + 0.365) \cdot 10^{-3} = 3.855 \cdot 10^{-3},$$
$$\varphi_1 = (-3.845 + 4.370 - 0.879 + 0.365) \cdot 10^{-3} = -0.1 \cdot 10^{-7}.$$

По значениям φ_4, φ_3 и φ_2 строим эпюру углов поворота (рис. 171). Вычисление φ_1 является простой проверкой расчетов. По условию угол поворота сечения в левой заделке должен быть равным нулю. Кроме того, $\varphi_5 = 0$.

8. Вычисляем касательные напряжения на участках по формуле (4.17)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -993 \cdot 0.09/(0.644 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = -6.939 \text{ МПа}, \\ \tau_2 &= 9007 \cdot 0.18/(10.306 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = 7.865 \text{ МПа}, \\ \tau_3 &= -8993 \cdot 0.25/(38.349 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = -2.931 \text{ МПа}, \\ \tau_4 &= -6007 \cdot 0.32/(102.943 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6) = 0.934 \text{ МПа}. \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Строим эпюру максимальных касательных напряжений (рис. 172). В точках приложения сосредоточенных моментов эпюра моментов имеет разрыв (скачок), а эпюра углов поворота — излом.

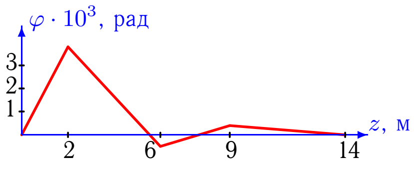

Рис. 171

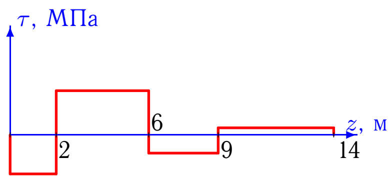

Рис. 172

Maple - программа решения статически неопределимой задачи на кручение приведена на с. 226.

4.4. Секториальные характеристики сечения

Постановка задачи. *Найти геометрические характеристики сечения тонкостенного стержня открытого профиля.*

При свободном кручении стержней сечения остаются плоскими, поворачиваясь одно относительно другого. При стесненном кручении тонкостенных стержней сечения искривляются — возникает депланация, переменная по длине стержня. Это приводит к дополнительным касательным и нормальным напряжениям в сечении. В решение задачи о стесненном кручении стержней, принадлежащее В.З. Власову [1], помимо уже изученных моментов инерций (с. 106), входят новые геометрические характеристики сечения, определение которых составляет содержание этого раздела.

Основной новой характеристикой сечения является понятие секториальной площади точки кривой.

Секториальная площадь точки кривой C относительно точки B с *полюсом* A определяется как криволинейный интеграл

$$\omega^A_{B,C} = -\left[\int\limits_B^C \vec{r}\times d\vec{r}\right]_z = \int\limits_B^C (y-y_A)dx-(x-x_A)dy$$

и численно равна удвоенной площади, ометаемой радиусом $\vec{AP}$, где P — точка на кривой, при движении точки P от B к C, взятой со знаком плюс, если поворот вектора происходит по часовой стрелке, и с минусом в противном случае. Если кривая является отрезком прямой

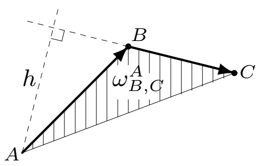

Рис. 173

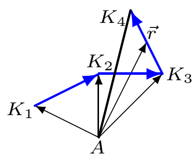

Рис. 174

BC (рис. 173), то секториальная площадь $\omega^A_{B,C}$ точки кривой C относительно точки B с полюсом A есть проекция вектора $\vec{\Omega} = \vec{AB}\times\vec{BC}$ на ось z со знаком минус: $\omega^A_{B,C} = -\Omega_z$. Если кривая представляет собой ломаную $K_1, ..., K_N$, то площадь определяется суммой

$$\omega^A_{N,1} = \sum_i^{N-1} \omega^A_{i,i+1},$$

где на каждом отрезке определяется секториальная площадь конца отрезка K_{i+1} относительно его начала K_i: $\omega^A_{i,i+1}$. В частности, для отрезка $K_1K_2K_3K_4$ (рис. 174) имеем $\omega^A_{K_4,K_1} = 2F_{\triangle AK_1K_2}+2F_{\triangle AK_2K_3}-$ $- 2F_{\triangle AK_3K_4}$. Удвоенная площадь треугольника AK_3K_4 взята с минусом, так как поворот вектора $\vec{r}$ при движении по отрезку от K_3 к точке K_4 происходит против часовой стрелки.

[1]Василий Захарович Власов (1906–1958) — выдающийся советский ученый, чл.-корр. АН СССР, автор теории тонкостенных конструкций.

План решения

1. Определяем площадь сечения как сумму площадей составляющих прямоугольников [1]

$$F = \sum_{i=1}^{n} l_i \delta_i. \qquad (4.26)$$

Введены обозначения: l_i — длина i-го участка, δ_i — его толщина.

2. Определяем координаты центра тяжести сечения. Вводим произвольную систему координат. Если сечение имеет ось симметрии, то начало координат лучше выбирать на ней. Строим эпюры координат точек сечений. Координаты центра тяжести определяем по формулам

$$x_c = \frac{1}{F}\int_F y dF, \quad y_c = \frac{1}{F}\int_F x dF, \qquad (4.27)$$

где интегрирование выполняем по правилу Верещагина [2]. Согласно правилу Верещагина, интеграл от произведения эпюр $m(x)$ и $M(x)$ на участке от l_1 до l_2 равен произведению двух чисел

$$\int_{l_1}^{l_2} m(x)M(x)dx = \Omega h,$$

одно из которых Ω равно площади криволинейной эпюры, второе h — ордината линейной, взятая под центром тяжести криволинейной.

3. Определяем главные моменты инерции сечения. Моменты инерции относительно выбранных осей определяем по формулам

$$J_x = \int_F y^2 dF, \ \ J_y = \int_F x^2 dF, \qquad (4.28)$$

где интегрирование также выполняем по правилу Верещагина. Находим главные моменты инерции сечения по формулам (4.9), с. 109.

---

[1] Скруглениями на стыках прямоугольников, существующими в реальных конструкциях, пренебрегаем.

[2] Безусловно, самый очевидный путь решения задачи — непосредственное интегрирование, тем более, что интеграл табличный. Однако в процессе решения иногда приходится выполнять это простое действие так много раз, что напрашивается желание как то ускорить эту многократно повторяющуюся операцию. Правило Верещагина — один из путей упрощения решения (без потери точности). Другой путь — формула Симпсона. Она имеет вид $\int_{l_1}^{l_2} m(x)M(x)dx = \frac{l}{6}(aA+4cC+bB)$, где a, b — ординаты на концах линейной эпюры, A, B — ординаты на концах нелинейной эпюры, c и C — ординаты эпюр, вычисленные в середине участка.

4. Строим эпюру секториальных площадей ω_B сечения при произвольном полюсе B и произвольной начальной точке [1].

5. Оси координат совмещаем с главными центральными осями сечения [2]. Вычисляем секториально-линейные статические моменты:

$$S_{x\omega_B} = \int\limits_F y\omega dF, \quad S_{y\omega_B} = \int\limits_F x\omega dF. \tag{4.29}$$

Интегрирование выполняем по правилу Верещагина.

6. Определяем координаты центра изгиба A:

$$\alpha_x = -S_{x\omega_B}/J_{x_c}, \quad \alpha_y = S_{y\omega_B}/J_{y_c}. \tag{4.30}$$

7. Строим эпюру секториальных площадей ω_A сечения при полюсе в центре изгиба и произвольной начальной точке.

8. Определяем константу D, задающую главные секториальные площади,

$$D = S_{\omega_A}/F = \int\limits_F \omega dF/F. \tag{4.31}$$

9. Строим эпюру главных секториальных площадей сечения

$$\omega = \omega_A - D. \tag{4.32}$$

10. Вычисляем секториальный момент инерции сечения

$$J_\omega = \int\limits_F \omega^2 dF. \tag{4.33}$$

Задача 47. Найти геометрические характеристики сечения тонкостенного стержня открытого профиля (рис. 175). Размеры относятся к

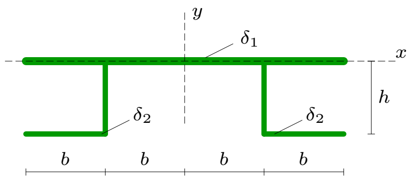

Рис. 175

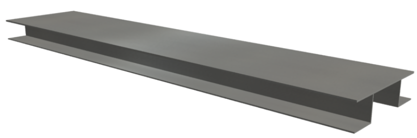

Рис. 176

[1]Начальная точка принадлежит срединной кривой сечения, а полюс может располагаться произвольно. Для симметричного профиля полюс и начальную точку можно расположить на оси симметрии и даже совместить.

[2]Для симметричного сечения эти оси проходят через центр тяжести и направлены по осям (оси) симметрии.

средним линиям сечения и указаны в сантиметрах. Толщина стенки равна 1 см. Стержень состоит из пластины толщиной $\delta_1 = 1,5$ см и двух уголков $b \times h$ толщиной $\delta_2 = 1$ см (рис. 176). Дано $b = 23$ см, $h = 21$ см.

Решение

1. Определяем площадь сечения как сумму площадей пяти составляющих прямоугольников

$$F = \sum_{i=1}^{5} l_i \delta_i = 4b\delta_1 + 2(b+h)\delta_2 = 226 \text{ см}^2.$$

2. Определяем координаты центра тяжести сечения. Вводим систему координат с началом в точке B (рис. 175). Строим эпюры координат точек сечений (рис. 177, 178).

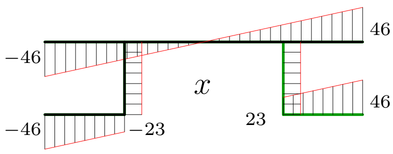

Рис. 177

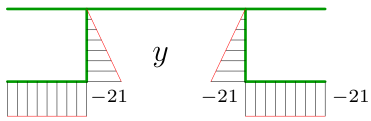

Рис. 178

Координаты центра тяжести определяем по формулам (4.27). Интегрирование заменяем суммированием. Замечая, что на каждом i-м участке $dF_i = \delta_i ds$, где δ_i — толщина сечения на участке, ds — дифференциал дуги, получаем

$$\int_{l_i} y dF = \delta_i \int_{l_i} y ds = \delta_i Y_i,$$

где Y_i — площадь эпюры y на i-м участке. Сечение симметрично относительно оси y, отсюда $x_c = 0$. Пользуясь эпюрой y на рис. 178, найдем:

$$y_c = -2\delta_2((1/2) \cdot 23 \cdot 21 + 23 \cdot 23)/226 = -6,23 \text{ см}.$$

3. Определяем главные моменты инерции сечения. Моменты инерции относительно выбранных осей определяем по формулам (4.28). Интегрирование выполняем по правилу Верещагина, умножая площадь одной эпюры на ординату другой под центром тяжести первой. Пользуясь эпюрой y на рис. 178, содержащей два участка (с учетом симметрии), найдем:

$$J_x = 2\delta_2 \left(\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 21 \cdot \mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{21} + 21 \cdot 23 \cdot \mathbf{21} \right) = 26460 \text{ см}^4$$

Ордината выделена полужирным шрифтом, $\delta_2 = 1$ см. Заметим, что при таком способе вычисления моментов инерции не учитываются моменты инерции прямоугольных частей сечения относительно собственных центральных продольных осей [1]. Аналогично, пользуясь эпюрой x на рис. 177, при $\delta_1 = 1,5$ см найдем:

$$J_y = 2\left(\delta_1 \frac{1}{2}\cdot 46\cdot 46\cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot \mathbf{46} + \delta_2\left(23\cdot 21\cdot \mathbf{23} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\cdot 23\cdot 23\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot \mathbf{23} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot \mathbf{46}\right) + \frac{1}{2}\cdot 46\cdot 23\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot \mathbf{46} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot \mathbf{23}\right)\right)\right) =$$
$$= 176333,33 \text{ см}^4.$$

Находим главные моменты инерции сечения

$$J_{x_c} = J_x - y_c^2 F = 26460 - 6,23^2\cdot 226 = 17700,49 \text{ см}^4,$$
$$J_{y_c} = J_y - x_c^2 F = J_y = 176333,33 \text{ см}^4.$$

4. Строим эпюру секториальных площадей ω_B сечения. Полюс B и начальную точку располагаем на оси симметрии — в начале координат (рис. 179). Очевидно, $\omega^B_{B,C} = 0$, $\omega^B_{B,C'} = 0$, $\omega^B_{B,K} = 0$, $\omega^B_{B,K'} = 0$ [2].

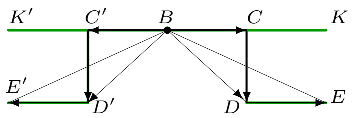

Рис. 179

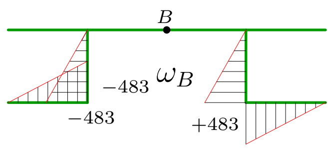

Рис. 180

Для правой половины сечения получаем

$$\omega^B_{C,D} = bh = 483 \text{ см}^2,\ \ \omega^B_{E,D} = -bh = -483 \text{ см}^2,$$
$$\omega^B_{B,E} = \omega^B_{B,C} + \omega^B_{C,D} + \omega^B_{E,D} = 0,$$
$$\omega^B_{B,D} = \omega^B_{B,C} + \omega^B_{C,D} = 483 \text{ см}^2.$$

[1] Точное выражение для момента инерции сечения, состоящего из прямоугольников, имеет вид $J_x = 4b\delta_1^3/12 + 2b\delta_2^3/12 + 2\delta_2 h^3/3 + 2b\delta_2 h^2 = 26489,71$ **см**^{4}. В приближенном выражении первые два слагаемых, содержащие δ^3, не учтены. Погрешность составляет 0,1%.

[2] В общем, если три точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой, то секториальная площадь $\omega^{K_1}_{K_2,K_3}$ точки кривой K_3 относительно точки K_2 с *полюсом* K_1 равна нулю.

Аналогично, для левой части

$$\omega^B_{C',D'} = -bh = -483\ \text{см}^2,\ \omega^B_{E,D'} = bh = 483\ \text{см}^2,$$
$$\omega^B_{B',E'} = \omega^B_{B,C'} + \omega^B_{C',D'} + \omega^B_{E',D'} = 0,$$
$$\omega^B_{B,D'} = \omega^B_{B,C'} + \omega^B_{C',D'} = -483\ \text{см}^2.$$

На рис. 180 изображена полученная эпюра.

5. Оси координат совмещаем с главными центральными осями сечения (рис. 181). Строим эпюру координат y в новой (центральной) системе координат (рис. 182). Все ординаты эпюры на рис. 178 получат приращение 6,23, а эпюра x не изменится, т.к. $x_c = 0$.

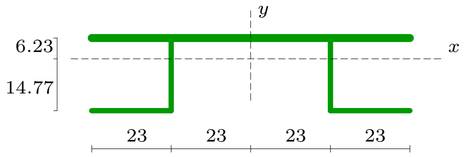

Рис. 181

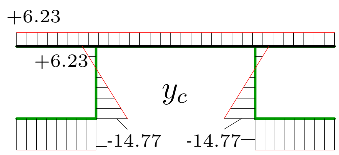

Рис. 182

Вычисляем секториально-линейные статические моменты, перемножая соответствующие эпюры. Так как эпюра ω антисимметричная, а эпюра y симметричная, то $S_{x\omega_B} = 0$. Далее, с учетом симметрии функции $x\omega_B$, по правилу Верещагина получаем $S_{y\omega_B} = 2\delta_2 \left(\frac{483}{2} \cdot 21 \cdot \mathbf{23} + \frac{483}{2} \cdot 23 \cdot \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{23} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{46}\right)\right) = 573965\ \text{см}^5$.

6. Определяем координаты центра изгиба A: $\alpha_x = 0$, $\alpha_y = S_{y\omega_B}/J_{y_c} = 573965/176333,33 = 3,26$ см.

7. Строим эпюру секториальных площадей ω_A сечения при полюсе в центре изгиба A и начальной точке B (рис. 183).

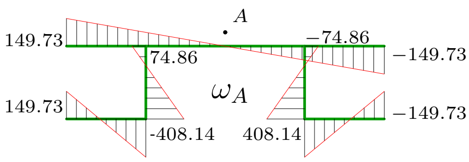

Рис. 183

8. Определяем константу D, задающую главные секториальные площади. В данном случае эпюра ω_A имеет площадь равную нулю, так как сечение симметрично, а точка отсчета секториальных площадей

(начальная точка) была выбрана на оси симметрии. Итак, $S_{\omega_A} = \int\limits_F \omega dF = 0$ и $D = S_{\omega_A}/F = 0$.

9. Эпюра главных секториальных площадей сечения $\omega = \omega_A - D$ при $D = 0$ совпадает с эпюрой ω_A (рис. 183).

10. Вычисляем секториальный момент инерции сечения J_ω. Умножаем эпюру ω саму на себя. Интеграл берем по правилу Верещагина. Учитываем симметрию эпюры (общий множитель 2), умножаем площадь эпюры на ее ординату другой под центром тяжести, ординату выделяем шрифтом:

$$\begin{aligned} J_\omega = \int\limits_F \omega^2 dF = 2\delta_1 \left(\frac{149,73}{2} \cdot 46 \cdot \mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{149,73} \right) + \\ +2\delta_2 \left(\frac{74,86}{2} \cdot 21 \cdot \left(\mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{74,86} - \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{408,14} \right) + \right. \\ + \frac{408,14}{2} \cdot 21 \cdot \left(\mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{408,14} - \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{74,86} \right) + \\ + \frac{408,14}{2} \cdot 23 \cdot \left(\mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{408,14} - \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{149,73} \right) + \\ \left. + \frac{149,73}{2} \cdot 23 \cdot \left(\mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{149,73} - \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{408,14} \right) \right) = \\ = 4974887,924 \text{ см}^6. \end{aligned}$$

Замечание 1. Если в п.4 полюс и начальную точку поместить в точку C', то получится другая эпюра секториальных площадей (рис. 184),

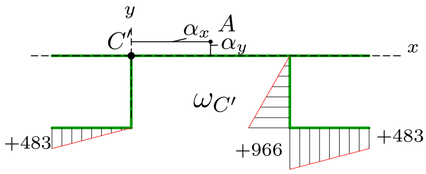

Рис. 184

однако решение не изменится, так как в п. 5 найдем

$$S_{x\omega_{C'}} = -407111,30 \text{ см}^4, \quad S_{y\omega_{C'}} = S_{y\omega_B} = 573965 \text{ см}^5.$$

В п. 6 определим координаты центра изгиба в системе координат с центром в C': $\alpha_x = -S_{x\omega_B}/J_{x_c} = 407111,30/17700,49 = 23$ см, $\alpha_y = S_{y\omega_B}/J_{y_c} = 573965/176333,33 = 3,26$ см. Таким образом, центр изгиба опять окажется в той же точке A.

Замечание 2. Константа D, задающая главные секториальные площади в п. 8 в рассмотренном примере оказалась равной нулю, так как эпюра ω_A была симметричной и имела нулевую площадь. Но это бывает не всегда и все зависит от выбора начальной точки. Возьмем для сравнения с уже полученным результатом начальную точку не на оси симметрии, а, например, в точке C'. Оставляя полюс в той же точке — в центре изгиба A, построим эпюру секториальных площадей (рис. 185).

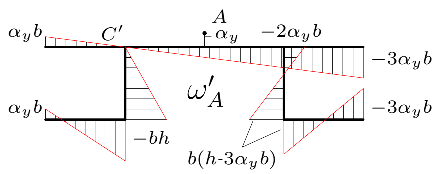

Рис. 185

Эпюра получилась несимметричной, и ее площадь отлична от нуля

$$S_{\omega_A} = \int\limits_F \omega dF = -2\alpha_y(2b^2\delta_1 + b\delta_2(b+h)) = -16919,5 \text{ см}^4.$$

Найдем константу D:

$$D = \frac{S_{\omega_A}}{F} = -\frac{2\alpha_y(2b^2\delta_1 + b\delta_2(b+h))}{2(2b\delta_1 + \delta_2(b+h))} = -b\alpha_y = -74,86 \text{ см}^2.$$

Если теперь вычесть полученную константу из ординат эпюры ω_A на рис. 185, то получится прежняя эпюра главных секториальных площадей (рис. 183).

Maple - программа определения секториального момента инерции приведена на с. 233.

4.5. Тонкостенные стержни открытого профиля

Задача 48. К тонкостенному стержню открытого профиля приложен крутящий момент $M = 1$Нм (рис. 186). Найти относительный угол закручивания θ и максимальное касательное напряжение. Модуль упругости материала $E = 0,7\cdot 10^5$МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Размеры даны в миллиметрах.

Решение

1. Разбиваем сечение на три длинных прямоугольника $s_1 = 42$ мм, $\delta_1 = 1$ мм, $s_2 = 15$ мм, $\delta_2 = 2$ мм, $s_3 = 22$ мм, $\delta_3 = 1$ мм (рис. 187). Вычисляем геометрическую характеристику жесткости сечения

$$J_d = (1/3)(42\cdot 1^3 + 15\cdot 2^3 + 22\cdot 1^3) = 61,33 \text{ мм}^4. \qquad (4.34)$$