Замечание 1. В качестве проверки можно сначала вычислить моменты инерции всей фигуры относительно заданных осей

$$J_x = \sum_i (J_{x_i} + y_i^2 F_i), \ \ J_y = \sum_i (J_{y_i} + x_i^2 F_i),$$
$$J_{xy} = \sum_i (J_{xy_i} + x_i y_i F_i),$$

а затем уже пересчитать результаты относительно центральных осей. Центральные моменты инерции имеют вид

$$J_{xc} = J_x - y_c^2 F, \quad J_{yc} = J_y - x_c^2 F, \ \ J_{xyc} = J_{xy} - x_c y_c F. \qquad (4.8)$$

Замечание 2. В тех случаях, когда для уголков в сортаменте не указан центробежный момент инерции J_{xy}, его легко вычислить по формуле (4.4), из которой в случае *равнополочных* уголков $J_{xc} = J_{yc}$ следует $J_{xy} = J_{\max} - J_{xc}$.

Задача 50. Найти максимальный и минимальный моменты инерции плоской фигуры (рис. 188) и угол наклона главной оси инерции к оси x. Размеры даны в сантиметрах.

Решение

1. Вводим систему координат. Разбиваем фигуру на пять частей: один квадрат размером 7×7см (фигура №1) и четыре вырезанных из него фигуры — два треугольника (№2, №3), прямоугольник №4, и четверть круга №5 радиусом $R = 2$ см (рис. 189) [1]. Определяем координаты центров тяжести фигур:

$$x_1 = 7/2 = 3{,}5 \text{ см}, \qquad y_1 = 7/2 = 3{,}5 \text{ см},$$
$$x_2 = 4/3 = 1{,}33 \text{ см}, \qquad y_2 = 2/3 = 0{,}67 \text{ см},$$
$$x_3 = 5 + 4/3 = 6{,}33 \text{ см}, \qquad y_3 = (2/3) \cdot 4 = 2{,}67 \text{ см},$$
$$x_4 = 5/2 = 2{,}5 \text{ см}, \qquad y_4 = 6 + 0{,}5 = 6{,}5 \text{ см},$$
$$x_5 = 4R/(3\pi) = 0{,}85 \text{ см}, \qquad y_5 = 4 + 4R/(3\pi) = 4{,}85 \text{ см}.$$

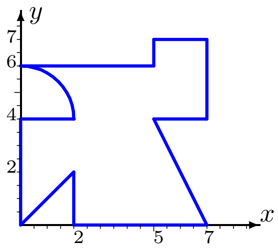

Рис. 188

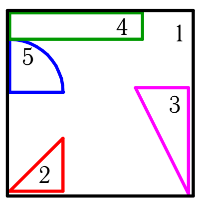

Рис. 189

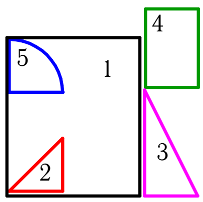

Рис. 190

[1] Возможно и другое разбиение на части (рис. 190). Здесь из прямоугольника №1 вырезаны четверть круга №5 и треугольник №2. К полученной фигуре добавлен треугольник №3 и прямоугольник №4.

2. Вычисляем площадь всей фигуры. Вычисляем площади составляющих, приписывая знак минус вырезанным частям: $F_1 = 7 \cdot 7 = 49$ см^2, $F_2 = -(1/2) \cdot 2 \cdot 2 = -2$ см^2, $F_3 = -(1/2) \cdot 4 \cdot 2 = -4$ см^2, $F_4 = -5 \cdot 1 = -5$ см^2, $F_5 = -\pi R^2/4 = -3{,}14$ см^2.

В сумме имеем $F = \sum\limits_i F_i = 49 - 2 - 4 - 5 - 3{,}14 = 34{,}86$ см^2.

3. Определяем координаты центра тяжести фигуры

$$x_c = \frac{49 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 1{,}33 - 4 \cdot 6{,}33 - 5 \cdot 2{,}5 - 3{,}14 \cdot 0{,}85}{34{,}86} = 3{,}68 \text{ см},$$
$$y_c = \frac{49 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 0{,}67 - 4 \cdot 2{,}67 - 5 \cdot 6{,}5 - 3{,}14 \cdot 4{,}85}{34{,}86} = 3{,}2 \text{ см}.$$

4. Определяем осевые J_{xc}, J_{yc} и центробежный J_{xyc} моменты инерции сечения относительно центральных осей.

Сначала записываем моменты инерции составляющих фигур относительно их центральных осей. Моменты инерции прямоугольника № 1 (квадрат $h = b = 7$ см) имеют вид (табл. 4, с. 478):

$$J_{xc1} = J_{yc1} = bh^3/12 = 70 \cdot 70^3/12 = 200{,}08 \text{ см}^4, \quad J_{xy1} = 0.$$

Осевые моменты инерции относительно собственных центральных осей прямоугольного равнобедренного треугольника № 2 ($h = b = 2$ см) вычисляем по формулам из таблицы 5, с. 479), не забывая приписать знак минус, как вырезанной фигуре:

$$J_{xc2} = -bh^3/36 = -2 \cdot 2^3/36 = -0{,}44 \text{ см}^4, \quad J_{yc2} = -hb^3/36 = -0{,}44 \text{ см}^4.$$

Знак центробежного момента инерции прямоугольного треугольника зависит от его ориентации (рис. 191). Если внешняя нормаль к гипотенузе направлена в 1-ю или 3-ю четверть декартовых координат

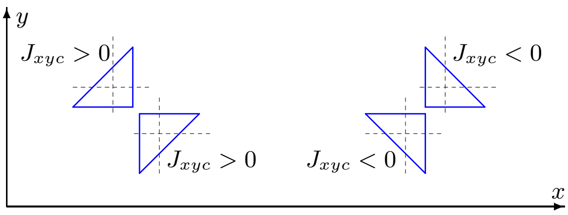

Рис. 191

(в правой системе координат), то центробежный момент инерции меньше нуля, как в табл. 5, с. 479: $J_{xy} = -b^2h^2/72$. В случае, если нормаль направлена во 2-ю или 4-ю четверть — знак плюс: $J_{xy} = b^2h^2/72$. В нашем случае у треугольника 2 нормаль направлена во 2-ю четверть, но так как он вырезан, меняем знак момента инерции и получаем $J_{xy2} = -b^2h^2/72 = -0{,}22$ см^4.

Рассуждая аналогично, получаем моменты инерции вырезанного прямоугольного треугольника № 3 ($h = 4$ см, $b = 2$ см)

$$J_{xc3} = -bh^3/36 = -2 \cdot 4^3/36 = -3{,}56 \text{ см}^4,$$
$$J_{yc3} = -hb^3/36 = -4 \cdot 2^3/36 = -0{,}89 \text{ см}^4,$$
$$J_{xy3} = b^2h^2/72 = 0{,}89 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции прямоугольника № 4 ($h = 1$ см, $b = 5$ см) равны:

$$J_{xc4} = bh^3/12 = 5 \cdot 1^3/12 = 0{,}42 \text{ см}^4,$$
$$J_{yc4} = hb^3/12 = 1 \cdot 5^3/12 = 10{,}42 \text{ см}^4,\ \ J_{xy4} = 0.$$

Сектор (четверть круга) №5 радиусом $R = 2$ см имеет следующие моменты инерции относительно собственных центральных осей (табл. 5, с. 479):

$$J_{xc5} = J_{yc5} = -R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = -2^4 \cdot 0{,}0548 = -0{,}88 \text{ см}^4,$$
$$J_{xy5} = -R^4\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right) = 2^4 \cdot 0{,}0165 \text{ см}^4 = 0{,}26 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции всей фигуры относительно центральных осей получаем по формулам (4.3):

$$\begin{aligned}J_{xc} = 200{,}08 &+ 49(3{,}5 - 3{,}2)^2 - 0{,}44 - 2(0{,}67 - 3{,}2)^2 - \\ &-3{,}56 - 4(2{,}67 - 3{,}2)^2 - 0{,}42 - 5(6{,}5 - 3{,}2)^2 - 0{,}88 - \\ &-3{,}14(4{,}85 - 3{,}2)^2 = 122{,}23 \text{ см}^4,\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}J_{yc} = 200{,}08 &+ 49(3{,}5 - 3{,}68)^2 - 0{,}44 - 2(1{,}33 - 3{,}68)^2 - \\ &-0{,}89 - 4(6{,}33 - 3{,}68)^2 - 10{,}42 - 5(2{,}5 - 3{,}68)^2 - \\ &-0{,}88 - 3{,}14(0{,}85 - 3{,}68)^2 = 117{,}72 \text{ см}^4,\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}J_{xyc} = 49&(3{,}2 - 3{,}5)(3{,}68 - 3{,}5) - 0{,}22 - \\ &-2(3{,}2 - 0{,}67)(3{,}68 - 1{,}33) + \\ &+0{,}89 - 4(3{,}2 - 2{,}67)(3{,}68 - 6{,}33) - \\ &-5(3{,}2 - 6{,}5)(3{,}68 - 2{,}5) + 0{,}27 - \\ &-3{,}14(3{,}2 - 4{,}85)(3{,}68 - 0{,}85) = 26{,}2 \text{ см}^4.\end{aligned} \tag{4.11}$$

5. Находим главные моменты инерции:

$$\begin{aligned}J_{max} &= \frac{117{,}72 + 122{,}23}{2} + \sqrt{\frac{(117{,}72 - 122{,}23)^2}{4} + 26{,}2^2} = \\ &= 119{,}98 + 26{,}3 = 146{,}27 \text{ см}^4,\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$J_{min} = 119{,}98 - 26{,}3 = 93{,}69 \text{ см}^4.$$

6. Вычисляем главные радиусы инерции

$$i_{max} = \sqrt{J_{max}/F} = \sqrt{146{,}27/34{,}86} = 2{,}05 \text{ см},$$
$$i_{min} = \sqrt{J_{min}/F} = \sqrt{93{,}69/34{,}86} = 1{,}64 \text{ см}.$$

7. Находим направление главных осей $\operatorname{tg} \alpha_{max} = J_{xyc}/(J_{yc} - J_{max}) = 26{,}2/(117{,}72 - 146{,}27) = -0{,}92$. Ось v (рис. 192), относительно которой момент инерции фигуры максимальный, направлен под углом $\alpha_{max} = -42{,}54°$ к оси x. Для проверки угол можно вычислить по формуле (4.6).

8. Выполняем проверку. Находим тригонометрические функции $\cos \alpha_{max} = 0{,}74$, $\sin \alpha_{max} = -0{,}68$, $\sin 2\alpha_{max} = -0{,}99$. Проверяем соотношение (4.7). Имеем

$$J_{max} = 122{,}23 \cdot 0{,}74^2 + 117{,}72 \cdot 0{,}68^2 + 26{,}2 \cdot 0{,}99 = 146{,}27 \text{ см}^4,$$
$$J_{min} = 122{,}23 \cdot 0{,}68^2 + 117{,}72 \cdot 0{,}74^2 - 26{,}2 \cdot 0{,}99 = 93{,}69 \text{ см}^4.$$

Эти же значения получены в п. 5. Проверка выполнена.

Замечание. Эллипс инерции обладает свойством, позволяющим получать моменты фигуры инерции относительно центральных осей, наклоненных под произвольным углом. Для того, чтобы найти момент инерции фигуры относительно центральной оси u_0, наклоненной под произвольным углом β к оси x, достаточно провести касательную u_1 к эллипсу параллельно оси u_0 и найти расстояние h между u_0 и u_1 (рис. 192). Это расстояние является радиусом инерции фигуры относительно u_0. Таким образом $J_{u0} = h^2 F$.

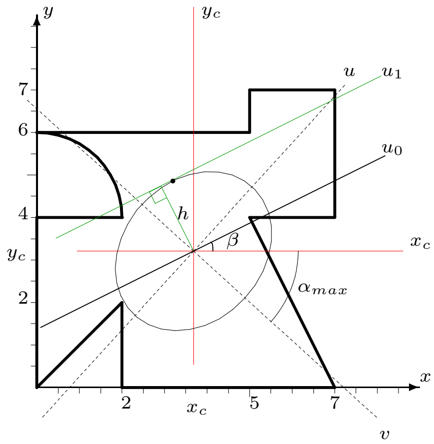

Рис. 192

Другое аналитическое выражение для этого момента инерции имеет вид $J_{u0} = J_{xc} \cos^2 \beta - J_{xyc} \sin 2\beta + J_{yc} \sin^2 \beta$. Формула для угла наклона главных осей (4.6) легко получается из условия минимума этого выражения.

Решение этой задачи в **Maple** по формуле Грина [1] см. на с. 392.

---

[1] *George Green* (1793–1841) — английский математик, физик.