

Для симметричных сечений  $J_{xy_c} = 0$  и формулы получают проще

$$\alpha_x = -S_{x\omega_B}/J_{x_c}, \quad \alpha_y = S_{y\omega_B}/J_{y_c}. \quad (4.31)$$

7. Строим эпюру секториальных площадей  $\omega_A$  сечения при полюсе в центре изгиба и произвольной начальной точке.

8. Вычисляем секториально-статический момент площади профиля

$$S_{\omega_A} F = \int_F \omega dF. \quad (4.32)$$

Определяем константу  $D$ , задающую главные секториальные площади,

$$D = S_{\omega_A}/F. \quad (4.33)$$

9. Строим эпюру главных секториальных площадей сечения

$$\omega = \omega_A - D. \quad (4.34)$$

10. Вычисляем секториальный момент инерции (бимомент инерции) сечения

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF. \quad (4.35)$$

Для проверки можно вычислить секториально-статический момент площади профиля  $S_\omega$ . Если полюс находится в центре изгиба, то он должен быть равен нулю.

**Задача 51.** Найти геометрические характеристики симметричного сечения тонкостенного стержня открытого профиля (рис. 195).

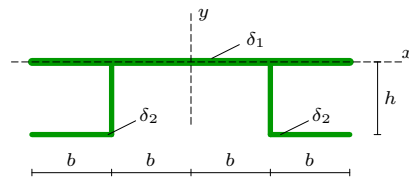


Рис. 195

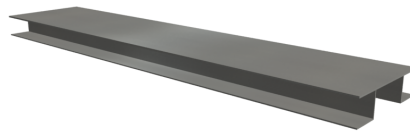


Рис. 196

Размеры относятся к средним линиям сечения и указаны в сантиметрах. Толщина стенки равна 1 см. Стержень состоит из пластины толщиной  $\delta_1 = 1,5$  см и двух уголков  $b \times h$  толщиной  $\delta_2 = 1$  см (рис. 196). Дано  $b = 23$  см,  $h = 21$  см.

**Решение**

1. Определяем площадь сечения как сумму площадей пяти составляющих прямоугольников

$$F = \sum_{i=1}^5 l_i \delta_i = 4b\delta_1 + 2(b+h)\delta_2 = 226 \text{ см}^2.$$

2. Определяем координаты центра тяжести сечения. Вводим систему координат с началом в точке  $B$  (рис. 195). Строим эпюры координат точек сечений (рис. 197, 198).

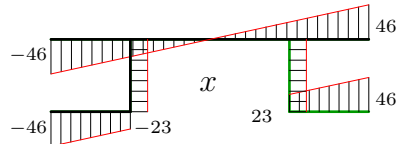


Рис. 197

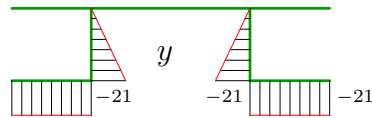


Рис. 198

Координаты центра тяжести определяем по формулам (4.27). Интегрирование заменяем суммированием. Замечая, что на каждом  $i$ -м участке  $dF_i = \delta_i ds$ , где  $\delta_i$  — толщина сечения на участке,  $ds$  — дифференциал дуги, получаем

$$\int_{l_i} y dF = \delta_i \int_{l_i} y ds = \delta_i Y_i,$$

где  $Y_i$  — площадь эпюры  $y$  на  $i$ -м участке. Сечение симметрично относительно оси  $y$ , отсюда  $x_c = 0$ . Пользуясь эпюрой  $y$  на рис. 198, вычисляем:

$$y_c = -2\delta_2((1/2) \cdot 21 \cdot 21 + 21 \cdot 23)/226 = -6,23 \text{ см}.$$

3. Определяем главные моменты инерции сечения. Моменты инерции относительно выбранных осей определяем по формулам (4.28). Интегрирование выполняем по правилу Верещагина, умножая площадь одной эпюры на ординату другой под центром тяжести первой. Пользуемся эпюрой  $y$  на рис. 198, содержащей два участка (с учетом симметрии). Умножаем эпюру саму на себя и находим:

$$J_x = 2\delta_2 \left( \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 21 \cdot \frac{2}{3} \cdot 21 + 21 \cdot 23 \cdot 21 \right) = 26460 \text{ см}^4$$

Ордината выделена полужирным шрифтом,  $\delta_2 = 1$  см. Заметим, что при таком способе вычисления моментов инерции не учитываются моменты инерции прямоугольных частей сечения относительно

собственных центральных продольных осей<sup>1</sup>. Аналогично, пользуясь эпюрой  $x$  на рис. 197, при  $\delta_1 = 1,5$  см получаем:

$$J_y = 2 \left( \delta_1 \frac{1}{2} \cdot 46 \cdot 46 \cdot \frac{2}{3} \cdot 46 + \delta_2 \left( 23 \cdot 21 \cdot 23 + \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 23 \left( \frac{2}{3} \cdot 23 + \frac{1}{3} \cdot 46 \right) + \frac{1}{2} \cdot 46 \cdot 23 \left( \frac{2}{3} \cdot 46 + \frac{1}{3} \cdot 23 \right) \right) \right) = 176333,33 \text{ см}^4.$$

Находим главные моменты инерции сечения

$$J_{x_c} = J_x - y_c^2 F = 26460 - 6,23^2 \cdot 226 = 17700,49 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = J_y - x_c^2 F = J_y = 176333,33 \text{ см}^4.$$

4. Строим эпюру секториальных площадей  $\omega_B$  сечения. Полюс  $B$  и начальную точку располагаем на оси симметрии — в начале координат (рис. 199). Очевидно,  $\omega_{B,C}^B = 0$ ,  $\omega_{B,C'}^B = 0$ ,  $\omega_{B,K}^B = 0$ ,  $\omega_{B,K'}^B = 0$ <sup>2</sup>.

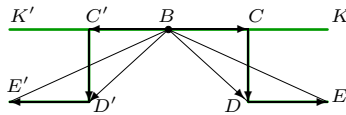


Рис. 199

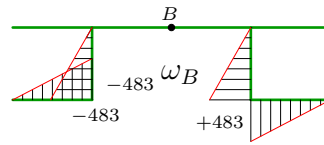


Рис. 200

Для правой половины сечения получаем

$$\omega_{C,D}^B = bh = 483 \text{ см}^2, \quad \omega_{E,D}^B = -bh = -483 \text{ см}^2,$$

$$\omega_{B,E}^B = \omega_{B,C}^B + \omega_{C,D}^B + \omega_{E,D}^B = 0,$$

$$\omega_{B,D}^B = \omega_{B,C}^B + \omega_{C,D}^B = 483 \text{ см}^2.$$

Аналогично, для левой части

$$\omega_{C',D'}^B = -bh = -483 \text{ см}^2, \quad \omega_{E',D'}^B = bh = 483 \text{ см}^2,$$

$$\omega_{B',E'}^B = \omega_{B,C'}^B + \omega_{C',D'}^B + \omega_{E',D'}^B = 0,$$

$$\omega_{B,D'}^B = \omega_{B,C'}^B + \omega_{C',D'}^B = -483 \text{ см}^2.$$

<sup>1</sup> Точное выражение для момента инерции сечения, состоящего из прямоугольников, имеет вид  $J_x = 4b\delta_1^3/12 + 2b\delta_2^3/12 + 2\delta_2 h^3/3 + 2b\delta_2 h^2 = 26489,71 \text{ см}^4$ . В приближенном выражении первые два слагаемые, содержащие  $\delta^3$ , не учтены. Погрешность составляет 0,1%.

<sup>2</sup> В общем, если три точки  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  лежат на одной прямой, то секториальная площадь  $\omega_{K_2,K_3}^{K_1}$  точки кривой  $K_3$  относительно точки  $K_2$  с полюсом  $K_1$  равна нулю.

На рис. 200 изображена полученная эпюра.

5. Оси координат совмещаем с главными центральными осями сечения (рис. 201). Строим эпюру координат  $y$  в новой (центральной) системе координат (рис. 202). Все ординаты эпюры на рис. 198 получают приращение 6,23, а эпюра  $x$  не изменится, т.к.  $x_c = 0$ .

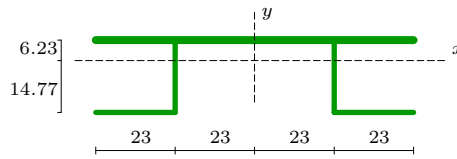


Рис. 201

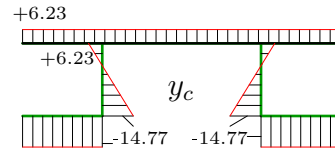


Рис. 202

Вычисляем секториально-линейный статический момент  $S_{y\omega_B}$ , перемножая эпюру координат  $x$  (рис. 197) и эпюру секториальных площадей  $\omega_B$  (рис. 200). С учетом симметрии функции  $x\omega_B$ , по правилу Верещагина получаем

$$S_{y\omega_B} = 2\delta_2 \left( \frac{483}{2} \cdot 21 \cdot 23 + \frac{483}{2} \cdot 23 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 23 + \frac{1}{3} \cdot 46 \right) \right) = 573965 \text{ см}^5.$$

Так как эпюра  $\omega$  антисимметричная, а эпюра  $y$  симметричная (рис. 202), то  $S_{x\omega_B} = \int_F y\omega dF = 0$ . Эпюра координат  $y$  в новой (центральной) системе координат в данном случае не потребовалась.

6. Определяем координаты центра изгиба  $A$ :  $\alpha_x = 0$ ,  $\alpha_y = S_{y\omega_B} / J_{y_c} = 573965 / 176333,33 = 3,26 \text{ см}$ .

7. Строим эпюру секториальных площадей  $\omega_A$  сечения при полюсе в центре изгиба  $A$  и начальной точке  $B$  (рис. 203).

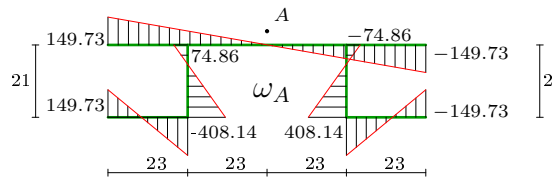


Рис. 203

8. Определяем константу  $D$ , задающую главные секториальные площади. В данном случае эпюра  $\omega_A$  имеет площадь равную нулю, так как сечение симметрично, а точка отсчета секториальных площадей (начальная точка) была выбрана на оси симметрии. Итак,  $S_{\omega_A} = \int_F \omega dF = 0$  и  $D = S_{\omega_A} / F = 0$ .

9. Эюра главных секториальных площадей сечения  $\omega = \omega_A - D$  при  $D = 0$  совпадает с эюрой  $\omega_A$  (рис. 203).

10. Вычисляем секториальный момент инерции сечения  $J_\omega$ . Умножаем эюру  $\omega$  (рис. 203) саму на себя. Интеграл берем по правилу Верещагина. Учитываем симметрию эюры (общий множитель 2), умножаем площадь эюры на ее ординату под центром тяжести. Ординату выделяем шрифтом:

$$\begin{aligned}
 J_\omega = \int_F \omega^2 dF &= 2\delta_1 \left( \frac{149,73}{2} \cdot 46 \cdot \frac{2}{3} \cdot 149,73 \right) + \\
 &+ 2\delta_2 \left( \frac{74,86}{2} \cdot 21 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 74,86 - \frac{1}{3} \cdot 408,14 \right) + \right. \\
 &+ \frac{408,14}{2} \cdot 21 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 408,14 - \frac{1}{3} \cdot 74,86 \right) + \\
 &+ \frac{408,14}{2} \cdot 23 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 408,14 - \frac{1}{3} \cdot 149,73 \right) + \\
 &\left. + \frac{149,73}{2} \cdot 23 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 149,73 - \frac{1}{3} \cdot 408,14 \right) \right) = \\
 &= 4974887,924 \text{ см}^6.
 \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Если в п.4 полюс и начальную точку поместить в точку  $C'$ , то получится другая эюра секториальных площадей (рис. 204),

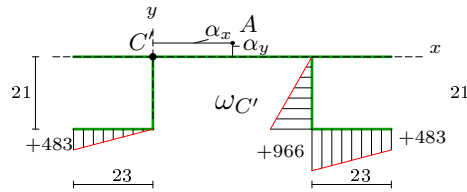


Рис. 204

однако решение не изменится, так как в п. 5 найдем

$$\begin{aligned}
 S_{x\omega_{C'}} = \int_F y\omega dF &= \delta_2 \left( \frac{966}{2} \cdot 21 \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot 14,77 + \frac{1}{3} \cdot 6,23 \right) + \right. \\
 &\left. - \frac{966 + 483}{2} \cdot 23 \cdot 14,77 - \frac{1}{2} \cdot 483 \cdot 23 \cdot 14,77 \right) = -407111,30 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Секториально-линейный статический момент относительно оси  $y$  не изменится:  $S_{y\omega_{C'}} = S_{y\omega_B} = 573965 \text{ см}^5$ . В п. 6 определим координаты центра изгиба в системе координат с центром в  $C'$ :  $\alpha_x =$

$= -S_{x\omega_B}/J_{x_c} = 407111,30/17700,49 = 23$  см,  $\alpha_y = S_{y\omega_B}/J_{y_c} = 573965/176333,33 = 3,26$  см. Таким образом, центр изгиба опять окажется в точке  $A$ .

**Замечание 2.** Константа  $D$ , задающая главные секториальные площади в п. 8 в рассмотренном примере оказалась равной нулю, так как эпюра  $\omega_A$  была симметричной и имела нулевую площадь. Но это бывает не всегда и все зависит от выбора начальной точки. Возьмем для сравнения с уже полученным результатом начальную точку не на оси симметрии, а, например, в точке  $C'$ . Оставляя полюс в той же точке — в центре изгиба  $A$ , построим эпюру секториальных площадей (рис. 205).

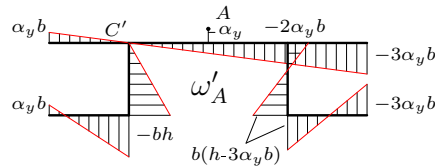


Рис. 205

Эпюра получилась несимметричной, и ее площадь отлична от нуля

$$S_{\omega_A} = \int_F \omega dF = -2\alpha_y(2b^2\delta_1 + b\delta_2(b+h)) = -16919,5 \text{ см}^4.$$

Найдем константу  $D$ :

$$D = \frac{S_{\omega_A}}{F} = -\frac{2\alpha_y(2b^2\delta_1 + b\delta_2(b+h))}{2(2b\delta_1 + \delta_2(b+h))} = -b\alpha_y = -74,86 \text{ см}^2.$$

Если теперь вычесть полученную константу из ординат эпюры  $\omega_A$  на рис. 205, то получится прежняя эпюра главных секториальных площадей (рис. 203).

**Задача 52.** Найти геометрические характеристики сечения тонкостенного стержня открытого профиля (рис. 206). Размеры относятся к

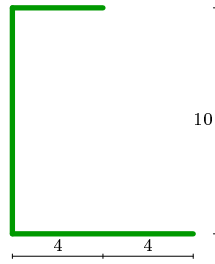


Рис. 206

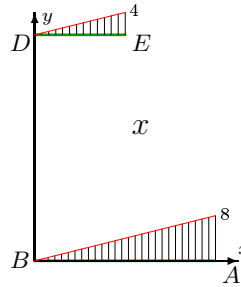


Рис. 207

средним линиям сечения и указаны в сантиметрах. Толщина стенки  $\delta$  равна  $0,2 \text{ см}^1$ .

### Решение

1. Определяем площадь сечения как сумму площадей трех прямоугольников (рис. 206):  $F = \sum_{i=1}^3 l_i \delta = (8 + 10 + 4) \cdot 0,2 = 4,4 \text{ см}^2$ .

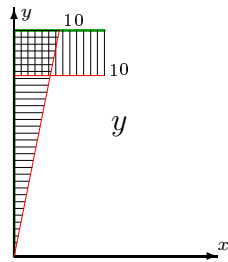


Рис. 208

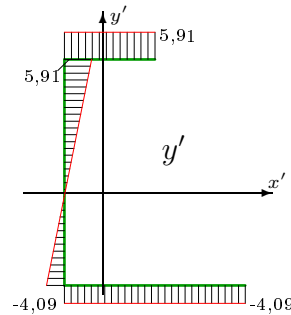


Рис. 209

2. Определяем координаты центра тяжести сечения. Вводим прямоугольную систему координат с началом в произвольной точке, например, угловой точке  $B$  (рис. 207). Строим эпюры координат точек сечений (рис. 207, 208).

Координаты центра тяжести определяем по формулам

$$x_C = \sum_{i=1}^3 l_i x_i \delta / F = 1,82 \text{ см}, \quad y_C = \sum_{i=1}^3 l_i y_i \delta / F = 4,09 \text{ см}.$$

<sup>1</sup>Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин — М.: Машиностроение, 1973. с.31.





Сечение несимметричное, поэтому центробежный момент инерции отличен от нуля. Перемножим эпюры координат на рис. 207 и рис. 208:

$$J_{xy} = \delta \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10 \right) = 16 \text{ см}^4.$$

Находим центральные моменты инерции сечения

$$J_{x_c} = J_x - y_c^2 F = 146,66 - 4,09^2 \cdot 4,4 = 73,03 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = J_y - x_c^2 F = 38,4 - 1,82^2 \cdot 4,4 = 23,85 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_y c} = J_{xy} - x_c y_c F = 16 - 4,09 \cdot 1,82 \cdot 4,4 = -16,73 \text{ см}^4.$$

Заметим, что этот же результат можно получить перемножая (или возводя в квадрат) соответствующие эпюры координат  $x'$ ,  $y'$  с началом в центре тяжести (рис. 210, 209).

4. Строим эпюру секториальных площадей  $\omega_A$  сечения. Полюс и начальную точку располагаем в произвольной точке, например, точке  $A$  (рис. 211). Очевидно,  $\omega_{A,B}^A = 0$ ,  $\omega_{A,D}^A = 10 \cdot 8 = 80 \text{ см}^2$ ,  $\omega_{A,E}^A = \omega_{A,D}^A + \omega_{D,E}^A = 80 + 10 \cdot 4 = 120 \text{ см}^2$ .

5. Оси координат совмещаем с центральными осями сечения. Строим эпюры координат  $x'$ ,  $y'$  в новой (центральной) системе координат (рис. 210, 209). Все ординаты эпюры на рис. 206 получают приращение  $-1,82$ , и эпюра координат  $x$  примет вид (рис. 210). Аналогично, вычитая из всех ординат на эпюры  $y$  значение  $y_c = 4,09$ , получаем эпюру  $y'$  (рис. 209).

Вычисляем секториально-линейные статические моменты  $S_{y'\omega_A}$ ,  $S_{x'\omega_A}$ , перемножая, соответственно, эпюры координат  $x'$  и  $y'$  (рис. 207, 208) и эпюру секториальных площадей  $\omega_A$  (рис. 211). По правилу Верещагина в соответствии с формулами (4.29) получаем

$$\begin{aligned} S_{y'\omega_A} &= \int_F x' \omega_A dF = \delta \left( 4 \cdot \frac{2,18}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 120 + \frac{1}{3} \cdot 80 \right) - \right. \\ &\quad \left. - 4 \cdot \frac{1,82}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 80 + \frac{1}{3} \cdot 120 \right) - 1,82 \cdot 10 \cdot \frac{80}{2} \right) = -120,533 \text{ см}^5, \\ S_{x'\omega_A} &= \int_F y' \omega_A dF = \delta \left( 5,91 \cdot 4 \cdot \frac{120 + 80}{2} + 5,91 \cdot \frac{10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 80 - \right. \\ &\quad \left. - 4,91 \cdot \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 80 \right) = 678,933 \text{ см}^5. \end{aligned}$$

6. Определяем координаты центра изгиба  $P$ :

$$x_P = \alpha_x^A + x_A = \frac{-S_{x'\omega_A}J_{y_c} + S_{y'\omega_A}J_{xy_c}}{J_{x_c}J_{y_c} - J_{xy_c}^2} + x_A = \frac{-14180,848}{1462,303} + 8 = -1,698 \text{ см},$$

$$y_P = \alpha_y^A + y_A = \frac{S_{y'\omega_A}J_{x_c} - S_{x'\omega_A}J_{xy_c}}{J_{x_c}J_{y_c} - J_{xy_c}^2} + y_A = \frac{2572,929}{1462,303} = 1,759 \text{ см}.$$

Для проверки координат можно выбрать другой полюс при построении эпюр секториальных площадей, поместив его, например,

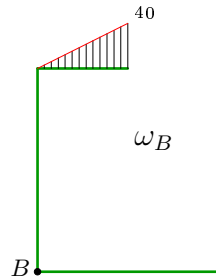


Рис. 212

в начало координат. Сюда же поместим и начальную точку. Полученная эпюра на рис. 212 называется теперь  $\omega_B$  (по названию полюса) и оказывается проще — в ней больше нулевых участков, что упрощает процедуру умножения по правилу Верещагина. Вычисляем секториально-линейные статические моменты

$$S_{y'\omega_B} = \int_F x'\omega_B dF = \delta \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \left( \frac{2}{3} \cdot 2,18 - \frac{1}{3} \cdot 1,82 \right) = 13,576 \text{ см}^5,$$

$$S_{x'\omega_B} = \int_F y'\omega_B dF = \delta \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \cdot 5,91 = 94,545 \text{ см}^5.$$

Проверяем координаты центра изгиба  $P$ :

$$x_P = \alpha_x^B + x_B = \frac{-S_{x'\omega_B}J_{y_c} + S_{y'\omega_B}J_{xy_c}}{J_{x_c}J_{y_c} - J_{xy_c}^2} = \frac{-2482,424}{1462,303} = -1,698 \text{ см},$$

$$y_P = \alpha_y^B + y_B = \frac{S_{y'\omega_B}J_{x_c} - S_{x'\omega_B}J_{xy_c}}{J_{x_c}J_{y_c} - J_{xy_c}^2} = \frac{2572,929}{1462,303} = 1,759 \text{ см}.$$

Значения получаются теми же. Можно переходить к заключительной части задачи — определению секториального момента инерции.

7. Строим эпюру секториальных площадей  $\omega_P$  сечения при полюсе в центре изгиба  $P$  и начальной точке  $A$  (рис. 213). Поворот радиус-вектора от направления  $PA$  к  $PB$  происходит по часовой стрелке,

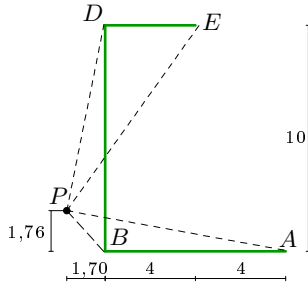


Рис. 213

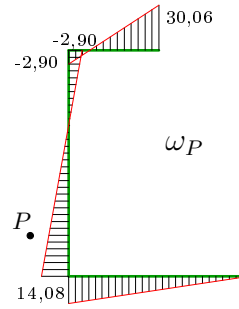


Рис. 214

поэтому секториальная координата точки  $B$  по отношению к точке  $A$  положительная и равна удвоенной площади треугольника  $PAB$ :  $\omega_{A,B}^P = 1,759 \cdot 8 = 14,076$ . От точки  $B$  к  $D$  радиус вектор поворачивается против часовой стрелки, ометая отрицательную площадь. Поэтому  $\omega_{A,D}^P = 14,076 - 1,697 \cdot 10 = 2,900$ . К точке  $E$  поворот радиуса-вектора с полюсом в  $P$  происходит по часовой стрелке, в результате  $\omega_{A,E}^P = 2,900 + (10 - 1,759) \cdot 4 = 30,062$ . На рисунке 214 изображена полученная эпюра.

8. Определяем константу  $D$ , задающую главные секториальные площади. Находим площадь построенной эпюры  $\omega_P$

$$S_{\omega_P} = \int_F \omega_P dF =$$

$$= 0,2 \left( \frac{30,062 - 2,9}{2} \cdot 4 + \frac{14,076 - 2,9}{2} \cdot 10 + \frac{14,076}{2} \cdot 8 \right) = 33,302 \text{ см}^4.$$

Получаем  $D = S_{\omega_P} / F = 33,302 / 4,4 = 7,568 \text{ см}^2$ .

9. Эпюра главных секториальных площадей сечения  $\omega = \omega_A - D$  имеет вид (рис. 203).

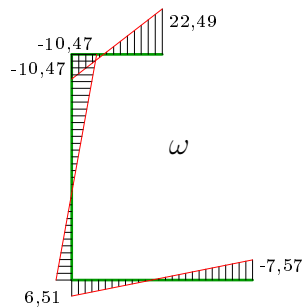


Рис. 215

Для проверки вычислим площадь построенной эпюры, т.е. секториально-статический момент. Имеем  $S_\omega = (22,49 - 10,47)/2 \cdot 4 + (6,51 - 10,47)/2 \cdot 10 + (6,51 - 7,57)/2 \cdot 8 = 24,04 - 19,80 - 4,24 = 0$ . Проверка выполнена.

10. Вычисляем секториальный момент инерции сечения  $J_\omega$ . Умножаем эпюру  $\omega$  (рис. 203) саму на себя. Интеграл берем по правилу Верещагина. Умножаем площадь эпюры на ее ординату под центром тяжести. Ординату выделяем шрифтом:

$$\begin{aligned}
 J_\omega = \int_F \omega^2 dF = & \delta \left( \frac{22,49}{2} \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 22,49 - \frac{1}{3} \cdot 10,47 \right) - \right. \\
 & - \frac{10,47}{2} \cdot 4 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 22,49 - \frac{2}{3} \cdot 10,47 \right) - \\
 & - \frac{10,47}{2} \cdot 10 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 6,508 - \frac{2}{3} \cdot 10,47 \right) + \\
 & + \frac{6,508}{2} \cdot 10 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 6,508 - \frac{1}{3} \cdot 10,47 \right) + \\
 & + \frac{6,508}{2} \cdot 8 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 6,508 - \frac{1}{3} \cdot 7,569 \right) + \\
 & \left. - \frac{7,569}{2} \cdot 8 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 6,508 - \frac{2}{3} \cdot 7,569 \right) \right) = \\
 = & 0,2(517,42 - 10,82 + 251,84 + 27,61 + 47,27 + 87,09) = 184,096 \text{ см}^6.
 \end{aligned}$$

Марле-программа определения секториального момента инерции приведена на с. ??.

#### 4.5. Тонкостенные стержни открытого профиля

**Задача 53.** К тонкостенному стержню открытого профиля приложен крутящий момент  $M = 1$  Нм (рис. 216). Найти относительный угол закручивания  $\theta$  и максимальное касательное напряжение. Модуль упругости материала  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Размеры даны в миллиметрах.

##### Решение

1. Разбиваем сечение на три длинных прямоугольника  $s_1 = 42$  мм,  $\delta_1 = 1$  мм,  $s_2 = 15$  мм,  $\delta_2 = 2$  мм,  $s_3 = 22$  мм,  $\delta_3 = 1$  мм (рис. 217). Вычисляем геометрическую характеристику жесткости сечения

$$J_d = (1/3)(42 \cdot 1^3 + 15 \cdot 2^3 + 22 \cdot 1^3) = 61,33 \text{ мм}^4. \quad (4.36)$$