Глава 8

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

8.1. Шарнирно закрепленное твердое тело на упругих стержнях

Постановка задачи. *Определить усилия в стержнях статически неопределимой системы, состоящей из шарнирно закрепленного твердого тела, удерживаемого в равновесии n упругими продольно деформируемыми стержнями.*

План решения

Для обеспечения равновесия тела достаточно только одного дополнительного стержня [1]. Следовательно, система $n-1$ раз статически неопределима. В число неизвестных реакций опор входят две реакции неподвижного шарнира и n усилий стержней. Следовательно, для решения задачи помимо трех уравнений статики необходимы дополнительные $n-1$ уравнения. Рассмотрим два способа получения этих уравнений.

Способ 1. Составление уравнений совместности деформаций

1. Находим $n-1$ геометрических соотношений между абсолютными деформациями стержней Δl_k, $k=1,...,n$.

2. Используем закон Гука $\Delta l_k = S_k l_k/(E_k F_k)$, где S_k — усилие в k-м стержне, $E_k F_k$ — жесткость стержня [2] а l_k — его длина. С учетом найденных геометрических соотношений получаем $n-1$ дополнительное уравнение для усилий S_k, $k=1,...,n$.

3. Записываем уравнение моментов всех сил, действующих на брус, включая неизвестные реакции стержней, относительно неподвижного шарнира.

---

[1] Предполагается, что система кинематически неизменяема. Если линия, на которой лежит дополнительный стержень, пресекает опорный шарнир тела (реальный или фиктивный), то система становится изменяемой.

[2] E_k — модуль упругости (МПа), F_k — площадь сечения (м^2)

4. Решаем систему n уравнений, одно из которых уравнение статики, а $n-1$ — соотношения, найденные из условия совместности деформаций. Находим усилия в стержнях.

Способ 2. Метод сил. Основой метода является формула Максвелла-Мора вычисления перемещений в упругих системах. В том случае, когда деформация является следствием удлинения или укорочения стержней, вызванных продольными силами (моментом и поперечной силой пренебрегаем), формула для перемещения по направлению вектора $\vec{e}_i$ от действия единичной силы $\vec{e}_j$ имеет вид

$$\delta_{ij} = \sum_{k}^{n} \int \frac{s_{k,i} s_{k,j}}{EF} ds, \tag{8.1}$$

где $s_{k,i}$ и $s_{k,j}$ усилия в стержне k от единичных сил, действующих по направлению e_i и e_j соответственно.

Перемещения по направлению вектора $\vec{e}_i$ от действия внешней нагрузки вычисляем по той же формуле Максвелла-Мора

$$\Delta_{ip} = \sum_{k}^{n} \int \frac{s_{k,i} s_{k,p}}{EF} ds, \tag{8.2}$$

где $s_{k,p}$ — усилие в стержне k от действия внешней нагрузки.

По методу сил действие лишних связей заменяем неизвестными силами. Полученная статически определимая система называется основной [1].

Значения неизвестных подбираем так, чтобы выполнялись кинематические ограничения связей, т.е. перемещения (угловые или линейные) равнялись нулю. Эти уравнения для n лишних связей имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} S_j + \Delta_{ip} = 0, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{8.3}$$

План метода сил для стержневых систем следующий:

1. Выбираем основную систему, т.е. освобождаем от связей $n-1$ стержень в месте крепления стержня к основанию. Усилия в этих стержнях назначаем неизвестными метода сил. Основная система представляет собой статически определимую систему, состоящую из шарнирно закрепленного тела с одним опорным стержнем, на которую действуют внешние силы и $n-1$ неизвестное усилие.

[1] Иногда вспомогательную статически определимую систему с отброшенными лишними связями называют основной, а вспомогательную статически определимую систему, в которой лишние связи заменены неизвестными силами — эквивалентной.

2. Находим усилие в опорном стержне основной системы от действия внешней нагрузки.

3. Находим усилие в опорном стержне основной системы от единичной нагрузки вдоль реакции лишней связи i. Этот пункт выполняем по числу статической неопределимости (т.е. числу $n-1$ лишних связей).

4. По формулам (8.1), (8.2) определяем коэффициенты канонических уравнений δ_{ij} и Δ_{iP}.

5. Составляем и решаем систему канонических уравнений (8.3). Находим неизвестные метода сил — реакции отброшенных (лишних) связей.

6. Из уравнения моментов относительно неподвижного шарнира всех сил основной системы, включая найденные реакции отброшенных связей, определяем усилие в опорном стержне.

Пример 1. Определить усилия в стержнях статически неопределимой системы, состоящей из шарнирно закрепленного твердого бруса, удерживаемого в равновесии двумя упругими продольно деформируемыми стержнями (рис. 152). На брус действует сила $P = 89$ Н. Даны размеры $AK = KC = 2$ м, $CB = 1$ м, и соотношение длин стержней $l_1 = 2l_2$. Жесткости стержней одинаковы.

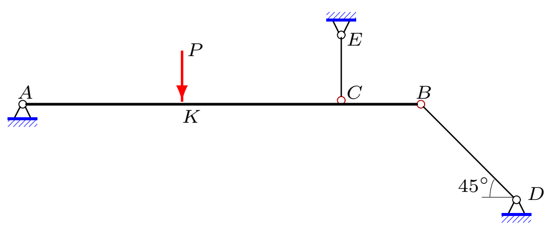


Рис. 152

Решение

Способ 1. Составление уравнений совместности деформаций

1. Находим одно геометрическое соотношение между абсолютными деформациями стержней Δl_1 и Δl_2.

Рассматриваем малую деформацию системы. Предположим, что брус повернулся на малый угол против часовой стрелки (рис. 153). Выбор направления несущественен. Ход расчета и его результат не изменятся, если повернуть брус в обратном направлении.

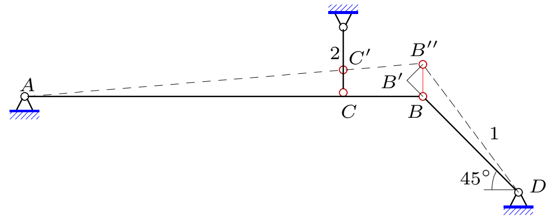


Рис. 153

Шарнир B переместится вертикально вверх и займет положение B'. Стержень 1 удлинится на $\Delta l_1 = BB'$ и повернется на некоторый малый угол. Перемещение шарнира B и удлинение стержня связаны. Предполагаем, что точки стержней при повороте перемещаются по малым дугам, которые заменяем отрезками, перпендикулярными к первоначальному (недеформированному) положению стержней. Перемещение точки B в положение B'' представим как результат удлинения стержня 1 в положение B' с последующим поворотом стержня на малый угол в положение B''. Из прямоугольного треугольника $BB'B''$, где $B'D \perp B'B''$, имеем $BB' = BB'' \cos 45°$.

Шарнир C также переместится вверх и займет положение C'. Стержень 2 укоротится: $\Delta l_2 = -CC'$. Знак минус ставим в случае укорочения стержня. Из подобия треугольников ABB' и ACC' имеем $CC'/AC = BB''/AB$. С учетом выражений для BB'' и CC' имеем искомое геометрическое соотношение

$$-\Delta l_2/4 = \Delta l_1/(5 \cos 45°) \tag{8.4}$$

2. Используем закон Гука $\Delta l_1 = l_1 S_1/(EF)$, $\Delta l_2 = l_2 S_2/(EF)$, где EF — жесткость стержней, а l_1 и l_2 — их длины. С учетом (8.4) и соотношения $l_1 = 2l_2$ после сокращения на жесткость EF получаем дополнительное уравнение для усилий

$$8\sqrt{2} S_1 + 5 S_2 = 0. \tag{8.5}$$

3. Записываем уравнение моментов всех сил, действующих на брус, включая неизвестные реакции стержней, относительно неподвижного шарнира. Силы S_1 и S_2, приложенные в действительности к стержням 1 и 2 в точках D и E соответственно, при составлении уравнения равновесия можно для удобства перенести вдоль линий их действия к точкам B и C (рис. 154):

$$\sum M_A = -P \cdot AK + S_2 \cdot AC - S_1 \cdot AB \sin 45° = 0. \tag{8.6}$$

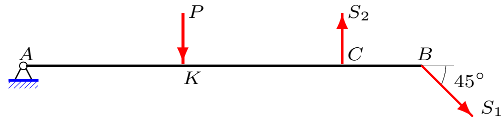


Рис. 154

4. Решаем систему уравнений (8.5), (8.6). Находим усилия в стержнях $S_1 = -14.14$ Н, $S_2 = 32$ Н. Стержень 1 оказывается сжат, стержень 2 — растянут.

Способ 2. Метод сил

1. Выбираем основную систему. Освобождаем от связи стержня 1 в месте его крепления к шарниру D.

Усилия S_1 в этом стержне назначаем неизвестным метода сил. Основная система представляет собой статически определимую систему, состоящую из шарнирно закрепленного бруса с одним опорным стержнем 2, на который действуют внешняя сила P и неизвестное усилие S_1 (рис. 155).

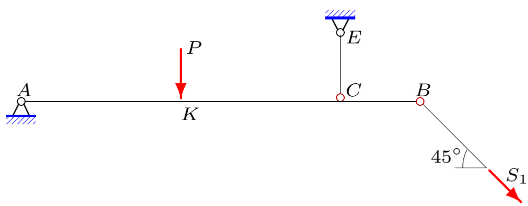


Рис. 155

2. Находим усилие в опорном стержне основной системы от действия внешней нагрузки P.

Усилие в стержне 2 от нагрузки P находим из уравнения моментов сил, приложенных к брусу, относительно неподвижного шарнира O (рис. 156). Стержень 1 остается ненагруженным. Приравниваем сумму моментов нулю: $s_{2,P}AC - P \cdot AK = 0$. Получаем $s_{2,P} = P/2 = 44.5$ кН.

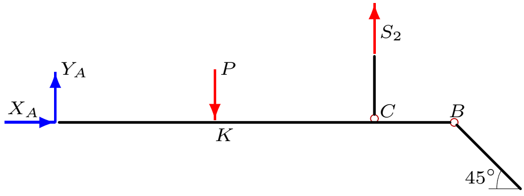


Рис. 156

3. Находим усилие в опорном стержне 2 основной системы от единичной нагрузки вдоль реакции лишней связи S_1 (рис. 157).

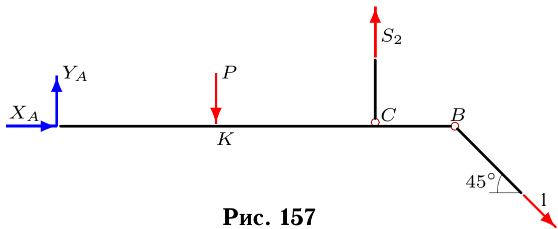


Рис. 157

Из уравнения моментов относительно опоры A (рис. 157) следует:

$$-1 \cdot AB \sin 45^\circ + s_{2,1} AC = 0.$$

Решаем это уравнение: $s_{2,1} = 5\sqrt{2}/8 = 0.884$.

4. По формулам Максвелла-Мора (8.1), (8.2) определяем коэффициенты канонических уравнений δ_{11} и Δ_{1P}.

$$\delta_{11} = \sum_k \int \frac{s_{k,1}^2}{EF} ds = \frac{l_1 \cdot 1^2 + l_2 s_{2,1}^2}{EF} = \frac{89 l_1}{64 EF} = \frac{1.39 l_1}{EF},$$
$$\Delta_{1p} = \sum_k \int \frac{s_{k,1} s_{k,p}}{EF} ds = \frac{l_2 s_{2,1} s_{2,p}}{EF} = \frac{19.67}{EF}.$$

5. Составляем и решаем каноническое уравнение метода сил. Для одного неизвестного в системе (8.3) остается одно уравнение

$$\delta_{11} S_1 + \Delta_{1p} = 0. \tag{8.7}$$

С учетом найденных значений коэффициентов получаем

$$1.39 S_1 + 19.67 = 0.$$

Решаем это уравнение. Находим реакцию отброшенной связи $S_1 = -$ -14.14 кН

6. Из уравнения моментов (8.6) относительно неподвижного шарнира всех сил основной системы, включая найденные реакции отброшенных связей, определяем усилие в опорном стержне 2. Получаем $S_2 =$ $= 32$ кН. Метод деформаций и метод сил дают одинаковый результат.

Пример 2. Дана стержневая конструкция, состоящая из жесткого недеформируемого бруса, закрепленного одним концом на неподвижном шарнире, и трех упругих стержней одинаковой жесткости, прикрепленных к брусу шарнирно (рис. 158). Вес стержней и деформации опор не учитывать. К свободному концу бруса приложена горизонтальная сила P=16 кН. Размер бруса дан в проекциях (в сантиметрах). Найти усилия в стержнях.

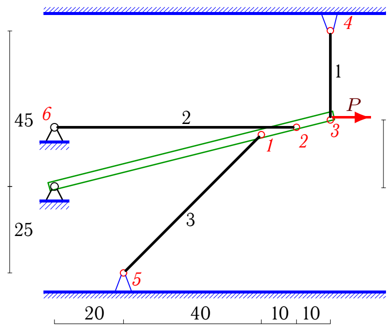


Рис. 158

Решение

Способ 1. Составление уравнений совместности деформаций

Система статически неопределимая. Для удержания бруса в равновесии очевидно достаточно неподвижного шарнира и только одного опорного стержня. Следовательно, система содержит две дополнительные неизвестные величины. Для их определения требуются два дополнительные уравнения. Этими уравнениями являются уравнения совместности деформаций. Совместность деформаций обеспечивает жесткость бруса. Стержни 3-4, 2-6 и 1-5 обозначим номерами 1, 2, 3 соответственно.

1. Находим два геометрических соотношения между абсолютными деформациями стержней Δl_1, Δl_2, Δl_3 .

Рассмотрим малое отклонение OC' бруса от недеформированного состояния OC (рис. 159). Шарниры 1, 2, 3 обозначим буквами A, B, C. После малой деформации эти шарниры примут положения A', B', C'. В силу малости деформаций дуги, по которым переместятся точки, заменим перпендикулярами к первоначальному положению бруса. Таким образом отрезки AA', BB', CC' перпендикулярны OC. Новые положения опорных стержней O_1C', O_2B', O_3A'. Опуская перпендикуляры из новых положений концов стержней на их первоначальные направления, получим удлинения $\Delta l_1 = CC''$ (рис. 160), $\Delta l_2 = BB''$ (рис. 161), $\Delta l_3 = -AA''$ (рис. 159). Минус в последнем случае объясняется сжатием стержня 3 (удлинение меньше нуля). Для перемещений концов стержней справедлива очевидная пропорция

$$\frac{AA'}{60} = \frac{BB'}{70} = \frac{CC'}{80}. \tag{8.8}$$

Кроме того, из прямоугольных треугольников имеем

$$AA' = -\Delta l_3/\sin\gamma,\ BB' = \Delta l_2/\sin\beta,\ CC' = \Delta l_1/\cos\beta,$$

где $\sin\beta = CL/OL = 20/\sqrt{20^2+80^2}$, $\sin\alpha = AK/O_3A = 40/\sqrt{40^2+40^2}$, $\gamma = \alpha - \beta$. Пропорция (8.8) примет вид

$$-\frac{\Delta l_3}{60\sin\gamma} = \frac{\Delta l_2}{70\sin\beta} = \frac{\Delta l_1}{80\cos\beta}. \qquad (8.9)$$

2. Используем закон Гука $\Delta l_k = S_k l_k/(EF)$, где S_k — усилие в k-м стержне, а l_k — его длина. Жесткость стержней EF одинакова. С учетом найденных геометрических соотношений получаем два дополнительных уравнений для усилий S_1, S_2, S_3.

Записываем закон Гука

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EF},\ \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{EF},\ \Delta l_3 = \frac{S_3 l_3}{EF}. \qquad (8.10)$$

Длины стержней определяем из рис. 159: $l_1 = 25$ см, $l_2 = 70$ см, $l_3 = \sqrt{40^2 + (25 + (3/4)\cdot 20)^2} = 40\sqrt{2} = 56.57$ см.

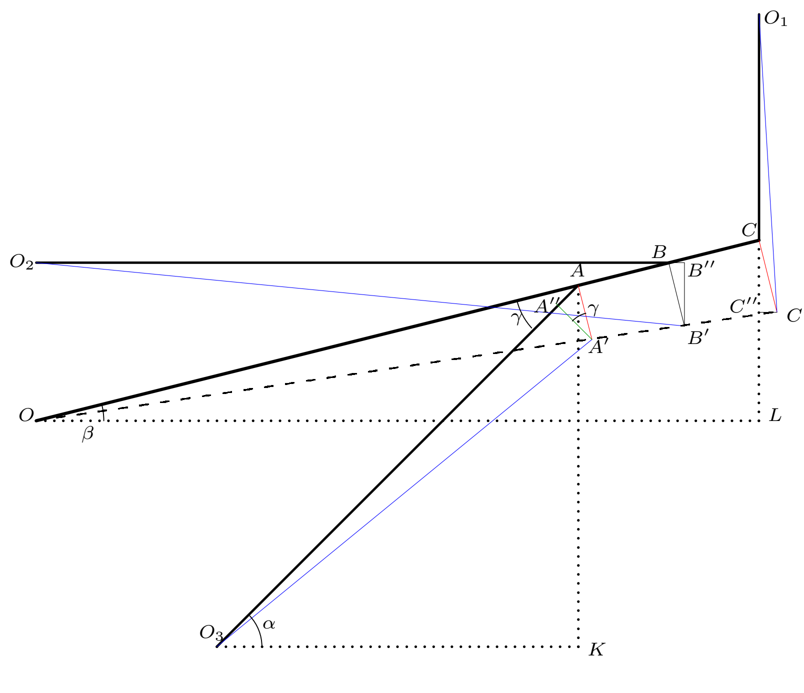
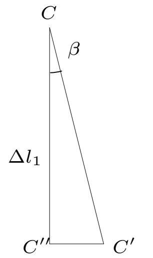


Рис. 159



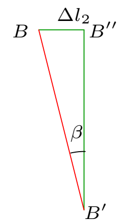


Рис. 160 **Рис. 161**

Подставляем (8.10) в (8.9). Получаем

$$-\frac{S_3 l_3}{60\sin\gamma} = \frac{S_2 l_2}{70\sin\beta} = \frac{S_1 l_1}{80\cos\beta}. \qquad (8.11)$$

Выражаем два усилия через третье

$$S_2 = \frac{70 S_1 l_1 \sin\beta}{80 l_2 \cos\beta} = 0.228 S_1, \;\; S_3 = -\frac{60 S_1 l_1 \sin\gamma}{80 l_3 \cos\beta} = -0.064 S_1. \qquad (8.12)$$

3. Записываем уравнение моментов всех сил, действующих на брус, включая неизвестные реакции стержней, относительно неподвижного шарнира (рис. 162).

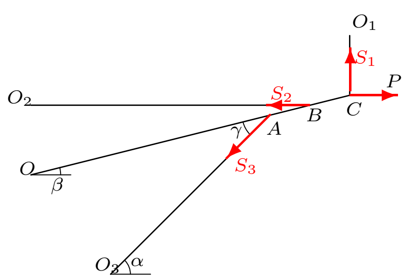


Рис. 162

Уравнение равновесия имеет вид

$$S_1 \cdot 80 + S_2 \cdot OB \sin\beta - S_3 \cdot OA \sin\gamma - P \cdot OC \sin\beta = 0, \qquad (8.13)$$

где $OA = 60/\cos\beta$, $OB = 70/\cos\beta$, $OC = 80/\cos\beta$.

4. Решаем систему трех уравнений, одно из которых уравнение статики: сумма моментов относительно неподвижного шарнира O а два других — соотношения (8.12), найденные из условия совместности деформаций. Находим усилия в стержнях.

Подставляем сюда соотношения (8.12). После упрощений получаем

$$86.96 S_1 - 20P = 0,$$

откуда находим усилие $S_1 = 0.23P = 3.68$ кН, и с помощью (8.12) два других: $S_2 = 0.018P = 0.29$ кН, $S_3 = -0.04P = -0.65$ кН.

Способ 2. Метод сил

1. Выбираем основную систему. Освобождаем от связей стержней 1 и 2 в месте их крепления к шарнирам 6 и 4.

Усилия в этих стержнях назначаем неизвестными метода сил. Основная система представляет собой статически определимую систему, состоящую из шарнирно закрепленного тела с одним опорным стержнем 3, на которую действуют внешние силы и неизвестные усилия S_1, S_2.

2. Находим усилие в опорном стержне основной системы от действия внешней нагрузки P.

Усилие в стержне 3 от нагрузки P находим из уравнения моментов сил, приложенных к брусу, относительно неподвижного шарнира O (рис. 163). Стержни 1 и 2 остаются ненагруженными. Приравниваем сумму моментов нулю:

$$-s_{3,P} OA \sin\gamma - P \cdot OC \sin\beta = 0.$$

Это уравнение также следует из (8.13) при $S_1 = S_2 = 0$. Получаем $s_{3,P} = -10.057$кН.

3. Находим усилие в опорном стержне 3 основной системы от единичной нагрузки вдоль реакции лишней связи S_1.

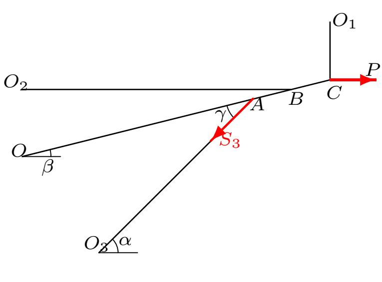


Рис. 163

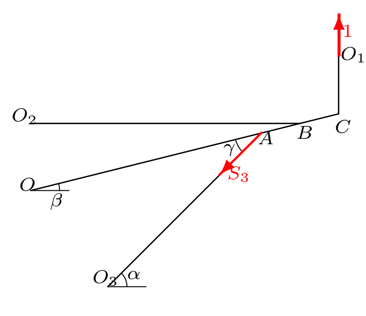


Рис. 164

Из уравнения моментов относительно опоры O (рис. 164) следует: $1 \cdot 80 - s_{3,1} OA \sin\gamma = 0$. Решаем уравнение: $s_{3,1} = 2.514$.

Усилие $s_{3,2}$ в стержне 3 от единичной нагрузки, приложенной к опоре стержня 2, находим из уравнения моментов (рис. 165): $1 \cdot OB \sin\beta - - s_{3,2} OA \sin\gamma = 0$,

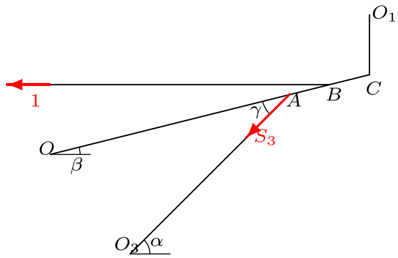


Рис. 165

Получим $s_{3,2} = 0.55$. Для вычисления коэффициентов канонических уравнений все результаты удобно занести в таблицу

k	l_k	$s_{k,1}$	$s_{k,2}$	$s_{k,P}$
1	25	1	0	0
2	70	0	1	0
3	56.57	2.51	0.55	-10.06

4. По формулам Максвелла-Мора (8.1), (8.2) определяем коэффициенты канонических уравнений δ_{ij} и Δ_{iP}.

$$\delta_{11} = \sum_k \int \frac{s_{k,1}^2}{EF} ds = \frac{l_1 \cdot 1^2 + l_3 s_{3,1}^2}{EF} = \frac{382.57}{EF},$$
$$\delta_{12} = \sum_k \int \frac{s_{k,1} s_{k,2}}{EF} ds = \frac{l_3 s_{3,1} s_{3,2}}{EF} = \frac{78.22}{EF},$$
$$\delta_{22} = \sum_k \int \frac{s_{k,2}^2}{EF} ds = \frac{l_2 \cdot 1^2 + l_3 s_{3,2}^2}{EF} = \frac{87.11}{EF},$$
$$\Delta_{1p} = \sum_k \int \frac{s_{k,1} s_{k,p}}{EF} ds = \frac{l_3 s_{3,1} s_{3,p}}{EF} = -\frac{1430.28}{EF},$$
$$\Delta_{2p} = \sum_k \int \frac{s_{k,2} s_{k,p}}{EF} ds = \frac{l_3 s_{3,2} s_{3,p}}{EF} = -\frac{312.87}{EF}.$$

5. Составляем и решаем систему канонических уравнений (8.3). Для двух неизвестных она имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_{11} S_1 + \delta_{12} S_2 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21} S_1 + \delta_{22} S_2 + \Delta_{2p} &= 0. \end{aligned} \tag{8.14}$$

С учетом найденных значений коэффициентов получаем систему

$$\begin{aligned} 382.57S_1 + 78.22S_2 - 1430.28 &= 0, \\ 78.22S_1 + 87.11S_2 - 312.87 \quad &= 0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Решаем систему канонических уравнений (8.15). Находим неизвестные метода сил — реакции отброшенных (лишних) связей $S_1 = 3.68$ кН, $S_2 = 0.29$ кН.

6. Из уравнения моментов (8.13) относительно неподвижного шарнира всех сил основной системы, включая найденные реакции отброшенных связей, определяем усилие в опорном стержне 3. Получаем $S_3 = -0.65$ кН.

В качестве проверки усилие S_3 можно найти из очевидной формулы

$$S_3 = s_{3,1}S_1 + s_{3,2}S_2 + s_{3,p} = 2.514 \cdot 3.68 + 0.55 \cdot 0.29 - 10.06 = -0.65. \tag{8.16}$$

Последнюю формулу можно понимать как выражение суммы усилий в стержне 3 от трех отдельных факторов: усилий в первом и втором стержне и от нагрузки P. При этом $s_{3,1}$ — это усилие в третьем стержне от действия единичной нагрузки в первом стержне, а так как S_1 это действительное усилие в стержне 1, то произведение $s_{3,1}S_1$ есть усилие в стержне 3 от действия нагрузки в стержне 1. Аналогично понимаются и другие слагаемые суммы (8.16).

Так как $S_3 < 0$, то третий стержень сжат. Два другие: $S_1 > 0$, $S_2 > 0$ — растянуты.

Усилия совпадают с ответами, полученными по первому методу (с. 156).

Maple-программа, реализующая метод сил, дана на с. 336.

Условия задач. *Дана стержневая конструкция, состоящая из жесткого недеформируемого бруса, закрепленного одним концом на неподвижном шарнире, и трех упругих стержней одинаковой жесткости, прикрепленных к брусу шарнирно. Вес стержней и деформации опор не учитывать. К свободному концу бруса приложена горизонтальная сила P. Размер бруса дан в проекциях (в сантиметрах). Найти усилия в стержнях.*