

Рис. 226

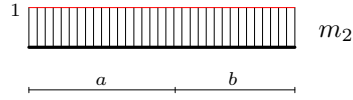


Рис. 227

Пример. Построить эпюры моментов, нормальных и перерезывающих сил в статически неопределимой раме (рис. 228), используя метод сил. В точке A рама имеет жесткую заделку, в точке B неподвижный шарнир. Даны нагрузки $P = 6$ кН, $q = 8$ кН/м.

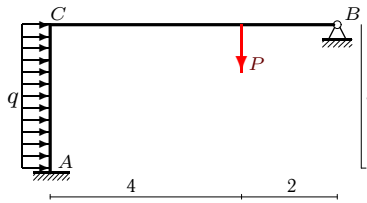


Рис. 228

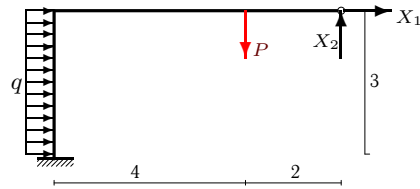


Рис. 229

Решение

1. Определяем число n лишних связей (число статической неопределимости). Рама имеет один контур и один однократный шарнир. Согласно (8.26), с. 177, имеем $N_F = 3K - \text{III} = 3 - 1 = 2$. Рама дважды статически неопределима.

Отбрасывая лишние связи, например в шарнире B , и заменяя их действие неизвестными реакциями X_1, X_2 , получаем основную систему, рис. 229. Заметим, что основная система не единственная. На рис. 230, 231, 232 приведены еще три варианта. В последнем случае в угол C рамы врезан шарнир, и, одновременно, к образовавшимся частям рамы приложены равные по модулю противоположно направленные пары X_2 .

Неудачный выбор лишних связей может привести к недопустимой кинематической изменяемости основной системы.

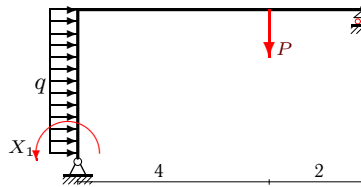


Рис. 230

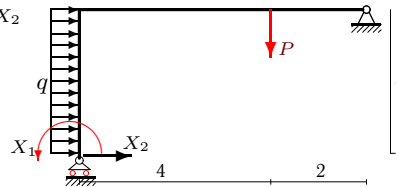


Рис. 231

На рис. 233 пример неправильной основной системы. Заделка в точке A превращена в горизонтально скользящую и отброшена горизонтальная связь в шарнире B . Рама имеет горизонтальную подвижность.

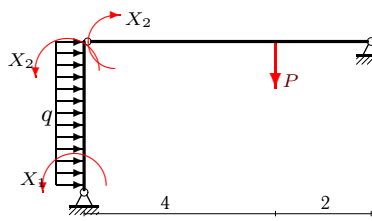


Рис. 232

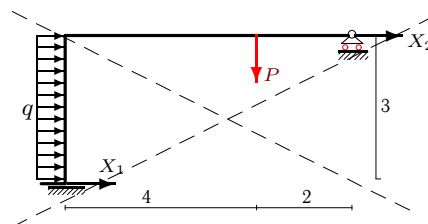


Рис. 233

2. Строим эпюры моментов M_P , перерезывающих Q_P и нормальных сил N_P в основной системе от действия внешней нагрузки (рис. 234). В данной задаче основная система выбрана консольного вида, поэтому при построении эпюр нет необходимости определять реакции опор X_A , Y_A , M_A . Выполняя сечения рамы, рассматриваем всякий раз часть рамы, не содержащую заделку. Полученные эпюры изображены на рис. 235, 236, 237.

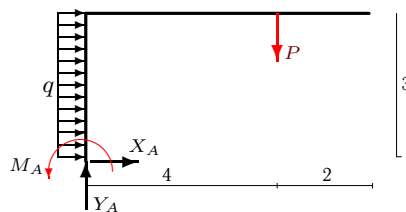


Рис. 234

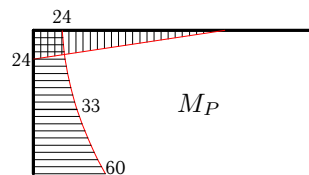


Рис. 235

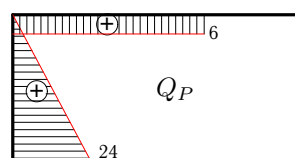


Рис. 236

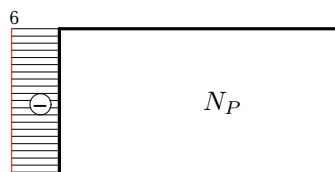


Рис. 237

3'. Строим эпюры моментов m_1 , перерезывающих q_1 и нормальных сил n_1 в основной системе от действия единичной силы (момента), направленной по неизвестной реакции X_1 . Внешние силы и неизвестные реакции к раме не прикладываем (рис. 238).



Рис. 238

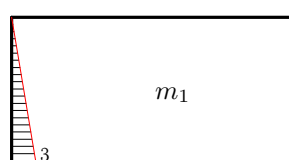


Рис. 239

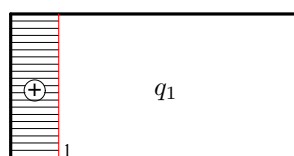


Рис. 240

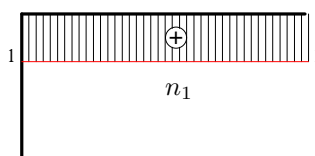


Рис. 241

3". Строим эпюры моментов m_2 , перерезывающих q_2 и нормальных сил n_2 в основной системе от действия единичной силы (момента), направленной по неизвестной реакции X_2 (рис. 242).



Рис. 242

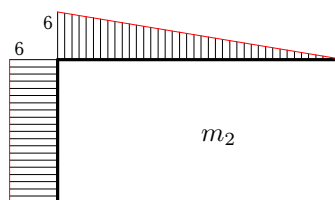


Рис. 243

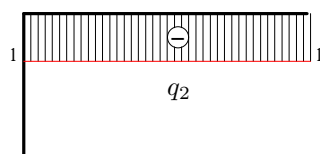


Рис. 244

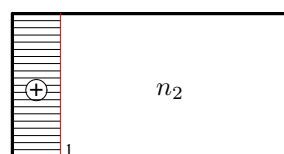


Рис. 245

4. По формуле Максвелла-Мора определяем коэффициенты канонической системы метода сил. Пользуемся правилом Верещагина для

перемножения эпюр. Площадь криволинейной эпюры умножаем ординату прямолинейной под центром тяжести криволинейной, ординату выделим полужирным шрифтом. Площадь параболической эпюры на участках с распределенной нагрузкой q вычисляем по формуле $(2/3)fl$, где l — длина участка, $f = ql^2/8$ — высота параболической эпюры. На участке AC имеем $l = 3$ м, $q = 8$ кН/м, $f = 8 \cdot 3^2/8 = 9$ кНм.

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \int_L \frac{m_1^2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{3} \right) = \frac{9}{EJ}, \\ \delta_{22} &= \int_L \frac{m_2^2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(6 \cdot 3 \cdot \mathbf{6} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{6} \right) = \frac{180}{EJ}, \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \int_L \frac{m_1 m_2 ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \mathbf{6} \right) = \frac{-27}{EJ}, \\ \Delta_{1P} &= \int_L \frac{m_1 M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 3 \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{3} + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 3 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{3} \right) = \frac{189}{EJ} \\ \Delta_{2P} &= \int_L \frac{m_2 M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{60+24}{2} \cdot 3 \cdot \mathbf{6} + \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \mathbf{6} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{6} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{2} \right) \right) = \frac{-872}{EJ}.\end{aligned} \quad (8.41)$$

Для проверки умножения можно воспользоваться следующими очевидными тождествами

$$\begin{aligned}\int_L \frac{(m_1 + m_2)^2 ds}{EJ} &= \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22}, \\ \int_L \frac{(m_1 + m_2)M_P ds}{EJ} &= \Delta_{1P} + \Delta_{2P}.\end{aligned} \quad (8.42)$$

5. Записываем и решаем каноническое уравнение метода сил

$$\begin{aligned}9X_1 - 27X_2 + 189 &= 0, \\ -27X_1 + 180X_2 - 872 &= 0.\end{aligned} \quad (8.43)$$

Находим неизвестные метода сил ¹ $X_1 = -11.76$ кН, $X_2 = 3.08$ кН.

¹В системе Maple решение имеет вид:

```
solve({9*x1-27*x2+189., -27*x1+180*x2-872.}, {x1, x2});
```

6. Строим эпюры моментов M , перерезывающих Q и нормальных сил N в раме по формулам

$$\begin{aligned} M &= M_P - 11.76m_1 + 3.08m_2, \\ Q &= Q_P - 11.76q_1 + 3.08q_2, \\ N &= N_P - 11.76n_1 + 3.08n_2. \end{aligned} \quad (8.44)$$

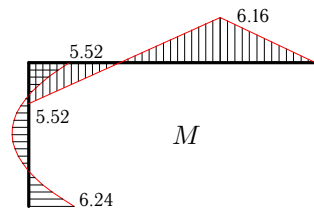


Рис. 246

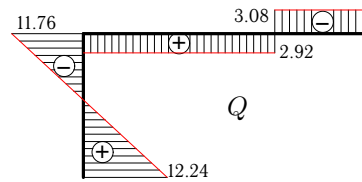


Рис. 247

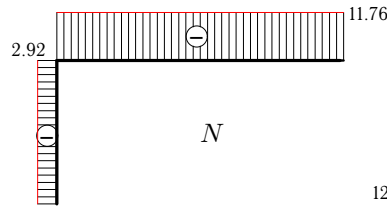


Рис. 248

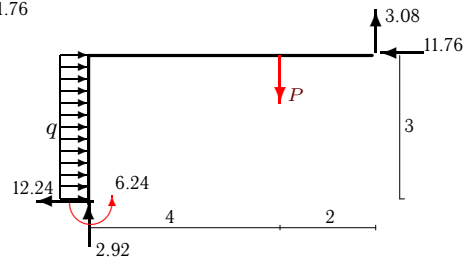


Рис. 249

7. Выполняем статическую проверку. Прикладываем к раме внешнюю нагрузку, действие опор заменяем реакциями, значение которых снимем с эпюр M , Q и N (рис. 249). Соблюдаем правило знаков для перерезывающих сил (положительные силы вращают участок по часовой стрелке), нормальных сил (положительные силы растягивают участок) и моментов (эпюра моментов построена на сжатом волокне). Проверяем выполнение уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= -12.24 + q \cdot 3 - 11.76 = -12.24 + 24 - 11.76 = 0, \\ \sum Y_i &= 2.92 - P + 3.08 = 2.92 - 6 + 3.08 = 0, \\ \sum M_A &= 3.08 \cdot 6 + 11.76 \cdot 3 - 24 \cdot 1.5 - 6 \cdot 4 + 6.24 = 0. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Статическая проверка выполняется. Рама находится в равновесии.

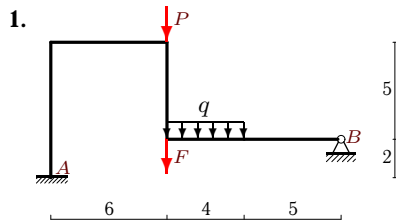
8. Выполняем кинематическую проверку. Для этого проверяем равенство нулю произведения построенной эпюры моментов M (рис. 246)

в раме на эпюру моментов от единичного состояния m_2 (рис. 243):

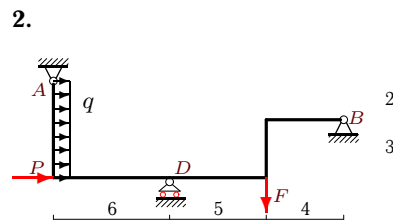
$$\int_L \frac{m_2 M ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{6.24 + 5.52}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 6 - \right. \\ \left. - \frac{5.52}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{6.16}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 6.16 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 0. \quad (8.46)$$

Выполнение этой кинематической проверки означает, что рама в шарнире B не имеет вертикального смещения. Для проверки горизонтального смещения в этой же точке необходимо перемножить m_1 и M . Для проверки угла поворота оси рамы в заделке (он должен быть равен нулю) умножаем M (рис. 246) на эпюру от действия единичного момента по направлению X_1 .

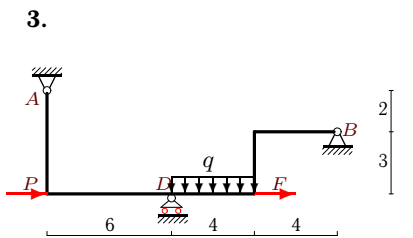
Условия задач. Построить эпюры моментов, нормальных и перерезывающих сил в статически неопределимой раме, используя метод сил.



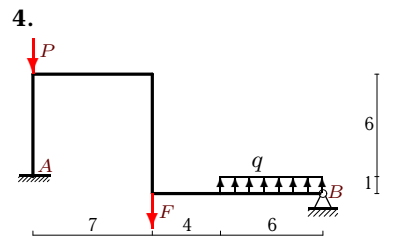
$$P=24 \text{ кН}, F=5 \text{ кН}, q=3 \text{ кН/м.}$$



$$P=12 \text{ кН}, F=10 \text{ кН}, q=2 \text{ кН/м.}$$



$$P=16 \text{ кН}, F=11 \text{ кН}, q=1 \text{ кН/м.}$$



$$P=40 \text{ кН}, F=12 \text{ кН}, q=4 \text{ кН/м.}$$