Глава 10

ВЯЗКОУПРУГОСТЬ И СТАБИЛЬНОСТЬ

10.1. Условие стабильности процесса

Постановка задачи. *Найти условие нестабильности порядка m/n динамического процесса, описываемого обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.*

План решения

1. Даем функции $x(t)$, скорости $\dot{x}(t)$ и ускорению $\ddot{x}(t)$ малые независимые приращения. Линеаризуем уравнение.

2. Дифференцируем линеаризованное уравнение по времени.

3. Записываем систему полученных уравнений в матричном виде, относя в правую часть приращения производных порядка m и n.

4. Приравниваем определитель системы нулю. Полученное уравнение является условием нестабильности. Подставляем в условие заданное значение скорости. Определяем критическую координату. Если в условие нестабильности входят вторые и третьи производные, то их надо выразить из исходного уравнения и его производной.

Пример. Дано уравнение некоторого динамического процесса:

$$16\,\ddot{x}\,\sqrt{\dot{x}} + b\,\dot{x} + x^4 = 0, \tag{10.1}$$

Определить условие нестабильности процесса порядка 0/3.

Решение

1. Даем функции $x(t)$, скорости $\dot{x}(t)$ и ускорению $\ddot{x}(t)$ малые независимые приращения. Линеаризуем уравнение [1]

$$16\sqrt{\dot{x}}\Delta\ddot{x} + (8\ddot{x}/\sqrt{\dot{x}}\,)\Delta\dot{x} + b\Delta\dot{x} + 4x^3\Delta x = 0, \tag{10.2}$$

[1] В общем случае линеаризация функции n переменных $F(u_1, u_2, ..., u_n)$ имеет вид $F + \sum\limits_{i=1}^{n} F_i'\Delta u_i$, где F_i' — частная производная по i—му аргументу.

2. Дифференцируем линеаризованное уравнение по времени [1]

$$16\sqrt{\dot{x}}\Delta\dddot{x} + (16\ddot{x}/\sqrt{\dot{x}}\,)\Delta\ddot{x} + (8\dddot{x}/\sqrt{\dot{x}}\,)\Delta\dot{x} - \\ -(4\ddot{x}^2/(\dot{x}\sqrt{\dot{x}})\,)\Delta\dot{x} + b\Delta\ddot{x} + 4x^3\Delta\dot{x} + 12x^2\dot{x}\Delta x = 0. \tag{10.3}$$

3. Записываем систему полученных уравнений (10.2) – (10.3) в матричном виде, относя в правую часть приращения производных порядка 0 и 3

$$\begin{bmatrix} 8\ddot{x}/\sqrt{\dot{x}} + b & 16\sqrt{\dot{x}} \\ 8\dddot{x}/\sqrt{\dot{x}} - 4\ddot{x}^2/(\dot{x}\sqrt{\dot{x}}) + 4x^3 & 16\ddot{x}/\sqrt{\dot{x}} + b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \tag{10.4}$$

где $\alpha_1 = -4x^3\Delta x$, $\alpha_2 = -12x^2\dot{x}\Delta x - 16\sqrt{\dot{x}}\Delta\dddot{x}$.

4. Приравниваем определитель системы нулю. Полученное уравнение является условием нестабильности.

$$128\dddot{x}\dot{x} + 4x^3\dot{x}\sqrt{\dot{x}} - 192\ddot{x}^2 - 24b\ddot{x}\sqrt{\dot{x}} = 0. \tag{10.5}$$

В условие нестабильности (10.5) входят вторые и третьи производные. Выражаем ускорение из исходного уравнения (10.1)

$$\ddot{x} = -(b\dot{x} + x^4)/(16\sqrt{\dot{x}}). \tag{10.6}$$

Дифференцируем по времени (10.6):

$$\dddot{x} = ((b\dot{x} + x^4)\ddot{x}/(\dot{x}\sqrt{\dot{x}}) - 2(b\ddot{x} + 4x^3\dot{x})/\sqrt{\dot{x}})/32. \tag{10.7}$$

Подставляем (10.6), (10.7). Получаем после преобразований

$$x^3(32 - \dot{x}^2\sqrt{\dot{x}}) = 0. \tag{10.8}$$

При заданном значении скорости $\dot{x} = 1$ определяем два значения критической координаты $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Для этих значений динамическая система нестабильна по отношению к возмущению производных порядка 0 и 3, т.е. как угодно малое изменение этих величин приводит к неограниченному росту скоростей и ускорений.

Условия задач. *Динамический процесс описывается дифференциальным уравнением. Найти условие нестабильности порядка m/n. Вычислить значение $x_{m/n}$ при $\dot{x} = \dot{x}_0$.*

[1] Или дважды дифференцируем исходное уравнение, а затем линеаризуем. Операторы дифференцирования и линеаризации коммутативны.

1. $6\ddot{x}x + 2\dot{x} + x^2 = 0,\quad m/n{=}(1/2),\quad \dot{x}_0 = 2.$

2. $3\ddot{x}x + 2\dot{x}^2 + x^2 = 0,\quad m/n{=}(1/2),\quad \dot{x}_0 = 1.$

3. $2\ddot{x} + 3\dot{x}^2 + x = 0,\quad m/n{=}(2/3),\quad \dot{x}_0 = 4.$

4. $4\ddot{x} + 3\dot{x} + x^2 = 0,\quad m/n{=}(0/3),\quad \dot{x}_0 = 2.$

5. $3\ddot{x}\dot{x} + 4\dot{x} + x = 0,\quad m/n{=}(1/3),\quad \dot{x}_0 = 2.$

6. $6\ddot{x}\dot{x} + 4x^2 + x = 0,\quad m/n{=}(1/2),\quad \dot{x}_0 = 3.$

7. $6\ddot{x} - 5\dot{x} + \sqrt{x} = 0,\quad m/n{=}(1/3),\quad \dot{x}_0 = 1.$

8. $3\ddot{x} + 5\sqrt{\dot{x}} + x = 0,\quad m/n{=}(0/3),\quad \dot{x}_0 = 3.$

9. $5\ddot{x} + 6\dot{x}^2 + x\dot{x} = 0,\quad m/n{=}(1/3),\quad \dot{x}_0 = 2.$

10. $2\ddot{x} + 6x + x\dot{x} = 0,\quad m/n{=}(0/3),\quad \dot{x}_0 = 3.$

Ответы

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{m/n}$	2.000	1.414	-47.667	1.125	-4.000	-0.125	0.600	-12.471	-18.000	4.899

Maple – программа определения условия нестабильности приведена на с. 293.

10.2. Условие стабильности процесса на плоскости

Постановка задачи. *Динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений. Найти условие нестабильности порядка m/n. Вывести уравнение кривой нестабильности при $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$.*

План решения

1. Линеаризуем систему уравнений относительно приращений функций Δx, Δy, их скоростей $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$ и ускорений $\Delta\ddot{x}$, $\Delta\ddot{y}$.

2. Находим матрицу системы линейных относительно $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$ уравнений для точки нестабильности порядка (0/2) или относительно Δx, Δy для точки нестабильности порядка (1/2).

3. Приравнивая нулю определитель полученной матрицы, записываем искомое условие нестабильности. Если в это условие входят вторые производные функций, вычисляем их из заданной системы дифференциальных уравнений. Для получения окончательного выражения для условия подставляем в него значения заданных скоростей.