9.39. Колебания грузов на упругой балке

Постановка задачи. *Два груза массой m_1 и m_2 расположены на упругой балке. Пренебрегая массой балки, определить частоты собственных малых поперечных колебаний грузов. Грузы считать материальными точками. Даны размеры и жесткость балки на изгиб.*

В общем случае грузы на упругой балке могут совершать поперечные в двух направлениях и продольные колебания. Если грузы являются телами, а не материальными точками, и имеют моменты инерции, то возможны также крутильные колебания. Хотя постановка задачи о колебаниях грузов по одной оси является простейшей, она имеет практическое значение в решениях многих задач машиностроения, например, задачи о колебаниях вала турбины. В данной задаче система имеет две степени свободы. Принимая вертикальные (поперечные) смещения грузов в качестве обобщенных координат, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода (9.25), где $q_1 = y_1$, $q_2 = y_2$. Кинетическая энергия системы без учета массы балки имеет вид $T = m_1\dot{y}_1^2/2 + m_2\dot{y}_2^2/2$. Предполагая, что упругие силы линейно зависят от перемещений, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода в матричном виде:

$$A\ddot{\vec{y}} + C\vec{y} = 0, \tag{9.28}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{9.29}$$

C — матрица жесткости. Матрица обратная C — матрица податливости

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22}, \end{bmatrix} \tag{9.30}$$

коэффициенты которой (перемещения от единичных сил) вычисляем по формуле Максвелла–Мора:

$$\delta_{ij} = \int\limits_0^l \frac{M_i M_j}{EJ} dx, \tag{9.31}$$

где M_i — эпюра моментов в балке от единичной силы, приложенной по направлению перемещения i-го груза, EJ — жесткость балки на изгиб. Коэффициенты $\delta_{i,j}$ имеют простой физический смысл: $\delta_{i,j}$ — это вертикальное перемещение груза i под действием единичной вертикальной силы, приложенной в месте крепления груза j. По теореме Бетти $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$. Умножаем (9.28) на C^{-1}

$$C^{-1}A\ddot{\vec{y}} + \vec{y} = 0 \tag{9.32}$$

и делаем подстановку $\ddot{\vec{y}} = -\omega^2\vec{y}$, что равносильно замене $y_i = A_i \sin(\omega t + \beta_0)$, $i = 1, 2$, где A_1, A_2 — амплитуды, ω — частота, β_0 — начальная фаза колебаний. Получаем однородную систему $B\vec{y} = 0$, имеющую ненулевое решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Учитывая, что

$$C^{-1}A = \left[\begin{array}{cc} \delta_{11}m_1 & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 \end{array}\right] \tag{9.33}$$

получаем матрицу

$$B = \left[\begin{array}{cc} -\omega^2 m_1\delta_{11} + 1 & -\omega^2 m_2\delta_{12} \\ -\omega^2 m_1\delta_{21} & -\omega^2 m_2\delta_{22} + 1. \end{array}\right] \tag{9.34}$$

Приравниваем нулю определитель, получаем частотное уравнение

$$\omega^4 m_1 m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) + 1 = 0. \tag{9.35}$$

Частотное уравнение является биквадратным и имеет два положительных решения, отвечающее двум собственным частотам системы.

План решения

1. Строим эпюры от вертикальных единичных сил, приложенных в местах крепления грузов.

2. Используя формулу Максвелла–Мора (9.36), перемножаем эпюры по правилу Верещагина и получаем коэффициенты δ_{11}, δ_{12}, δ_{22}.

3. Записываем частотное уравнение (9.35). Решаем его, получаем собственные частоты грузов.

Пример. Два груза массой $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 10$ кг расположены на упругой балке, состоящей из двух частей, соединенных шарниром C (рис. 299). Пренебрегая массой балки, определить частоты собственных малых колебаний грузов. Принять жесткость балки на изгиб $EJ = 1000$ Нм^2. Размеры даны в сантиметрах.

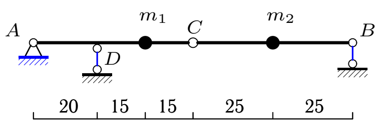

Рис. 299

Решение

1. Строим эпюры от вертикальных единичных сил, приложенных в местах крепления грузов. Прикладываем вертикальную единичную (безразмерную) силу в точке крепления груза 1. Из условия равновесия находим реакции опор. Правая часть балки оказывается незагруженной, реакции ее опор равны нулю. Эпюра M_1 (в сантиметрах) изображена на рис.301.

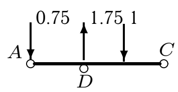

Рис. 300

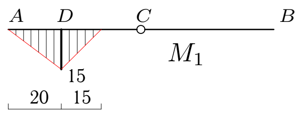

Рис. 301

Прикладываем вертикальную единичную силу в точке крепления груза 2. Из условия равновесия находим реакции опор. Рассматриваем отдельно левую и правую части. В отсутствии горизонтальных сил внутренний шарнир имеет только вертикальную реакцию, направленную для левой части вниз, а для правой вверх, рис. 302. Эпюра M_2 изображена на рис. 303. В промежуточном шарнире C эпюра не имеет излома, так как внешних сил в этой точке нет.

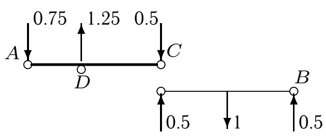

Рис. 302

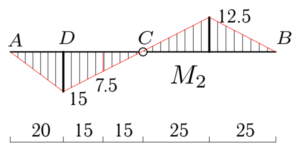

Рис. 303

2. Используя формулу Максвелла–Мора,

$$\delta_{ij} = \int\limits_0^l \frac{M_i M_j}{EJ} dx, \tag{9.36}$$

перемножаем эпюры рис. 301, 303 по правилу Верещагина и получаем коэффициенты δ_{11}, δ_{12}, δ_{22}. Площадь одной эпюры умножаем ординату другой под центром тяжести первой, ординату выделяем полужирном шрифтом. Размеры берем в сантиметрах. Получаем (в см^3)

$$
\begin{aligned}
\delta_{11} &= \frac{1}{EJ}\left(\frac{20\cdot 15}{2}\cdot\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{15}+\frac{15\cdot 15}{2}\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{15}\right)=\frac{2625}{EJ},\\
\delta_{12} &= \frac{1}{EJ}\left(\frac{20\cdot 15}{2}\cdot\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{15}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{15\cdot 15}{2}\cdot\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{15}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{7.5}\right)\right)=\frac{2906.25}{EJ},\\
\delta_{22} &= \frac{1}{EJ}\left(\frac{20\cdot 15}{2}\cdot\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{15}+\frac{30\cdot 15}{2}\cdot\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{15}+\right.\\
&\qquad\left.+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 12.5\cdot\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{12.5}\right)=\frac{6354.167}{EJ},
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

или при заданной жесткости балки $EJ = 1000$ Нм^2 получим $\delta_{11} = 2.625\cdot 10^{-6}$ м/Н, $\delta_{12} = 2.906\cdot 10^{-6}$ м/Н , $\delta_{22} = 6.354\cdot 10^{-6}$ м/Н.

3. Записываем частотное уравнение

$$\omega^4 m_1 m_2(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)-\omega^2(m_1\delta_{11}+m_2\delta_{22})+1=0. \tag{9.38}$$

Подставляем массы $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 10$ кг и найденные коэффициенты, получаем

$$0.412\cdot 10^{-9}\omega^4-0.767\cdot 10^{-4}\omega^2+1=0.$$

Решаем уравнение, находим собственные частоты грузов $\omega_1 = 118.798$ рад/с, $\omega_2 = 414.874$ рад/с.

Maple-программа для решения этой задачи дана на с. 379.

Условия задач. *Два груза массой m_1 и m_2 расположены на упругой балке. Пренебрегая массой балки, определить частоты собственных малых поперечных колебаний грузов. Грузы считать материальными точками. Принять жесткость балки на изгиб $EJ = 1000$ Нм^2. Размеры даны в сантиметрах.*