2. Выписываем краевые условия на концах стержня.

Если прогиб стержня на опоре равен нулю (подвижный и неподвижный шарнир, заделка или скользящая заделка), то $w = 0$. В случае заделки или скользящей заделки имеем $w' = 0$. Момент равен нулю на свободном конце стержня и в шарнире (без упругой пружины), $w'' = 0$. Если на опоре есть пружина, сила которой пропорциональна прогибу, то на левом конце имеем условие $EJw'''(0) + Pw(0) = -c_1 v(0)$, на правом $EJw'''(l) + Pw(l) = c_1 v(l)$, где c_1 — жесткость пружины. Если в опоре есть упругое сопротивление повороту, то на левом конце задаем $EJw''(0) = cw(0)$, а на правом $EJw''(l) = -c_2 w(l)$, где c_2 — жесткость пружины.

3. Для получения производных, входящих в краевые условия, дифференцируем (9.5). Последовательно получаем

$$\begin{aligned} w' &= Ak\cos kx - Bk\sin kx + C, \\ w'' &= -Ak^2\sin kx - Bk^2\cos kx. \end{aligned} \tag{9.6}$$

4. Записываем четыре краевых условия при $x = 0$, $x = l$. Получаем однородную систему для определения констант A, B, C, D.

5. Приравниваем нулю определитель системы. Получаем условие для ненулевого решения, т.е. условие потери устойчивости стержня.

6. Вводим переменную $t = kl$. Равенство нулю определителя, зависящего от t, дает уравнение для t. Решаем численно уравнение при заданном значении жесткости. Удобно ввести безразмерные параметры жесткости — относительную жесткость $a = EJ/(c_1 l^3)$ для линейного смещения Δy, где c_1 — жесткость пружины ($N_{\text{упр}} = c_1\Delta y$,) и относительную жесткость $b = EJ/(c_2 l)$ для углового смещения $\Delta\varphi$, где c_2 — жесткость пружины, $M_{\text{упр}} = c_2\Delta\varphi$.

Находим минимальный положительный корень $t = t^*$. Коэффициент приведения длины равен $\mu = \pi/t^*$.

Пример. Определить коэффициент μ приведения длины продольно сжатого стержня на упругой опоре. Длина стержня l, на левом конце стержень закреплен в упругой опоре, а на правом в подвижном шарнире (рис. 290). Задана относительная жесткость $EJ/(c_2 l) = 1$, где c_2 — жесткость пружины $M_{\text{упр}} = c_2\Delta\varphi$.

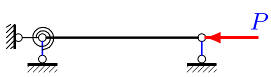

Рис. 290

Решение

1. Решение дифференциального уравнения продольного изгиба $w^{(4)} + k^2 w'' = 0$, где $k^2 = P/EJ$, ищем в виде (9.5).

2. Выписываем краевые условия на левом конце. Прогиб стержня на шарнирной опоре с упругим закреплением отсутствует, а угол поворота

пропорционален моменту:

$$w(0) = 0, \;\; cw'(0) = EJw''(0). \tag{9.7}$$

На другом конце ($x = l$) — шарнир идеальный. В нем равны нулю и прогиб и момент

$$w(l) = 0, \;\; EJw''(l) = 0. \tag{9.8}$$

3. Для получения производных, входящих в краевые условия, дифференцируем (9.5). Последовательно получаем

$$\begin{aligned} w' &= Ak\cos kx - Bk\sin kx + C, \\ w'' &= -Ak^2\sin kx - Bk^2\cos kx. \end{aligned} \tag{9.9}$$

4. Для определения констант A, B, C, D с учетом (9.5), (9.7), (9.8), (9.9), получаем следующую однородную систему

$$\begin{aligned} &B + D = 0, \\ &c(Ak + C) = -EJBk^2, \\ &A\sin kl + B\cos kl + Cl + D = 0, \\ &-Ak^2\sin kl - Bk^2\cos kl = 0. \end{aligned} \tag{9.10}$$

5. Приравниваем нулю определитель системы. Получаем условие для ненулевого решения, т.е. условие потери устойчивости стержня

$$\sin t - t\cos t + t^2 b\sin t = 0, \tag{9.11}$$

где $t = kl$, $b = EJ/(cl)$.

6. Решаем численно уравнение (9.11) при $b = 1$. Приближенное значение минимального положительного корня уравнения можно получить, раскладывая левую часть уравнения в ряд Тейлора [1] около π: $t = (4\pi + \sqrt{\pi^2 + 10})/5 = 3.404$. Коэффициент приведения длины равен $\mu = \pi/t = 0.922$.

Maple-программа для решения этой задачи дана на с. 376

Условия задач. *Прямолинейный стержень длиной l, закрепленный на одном конце в упругой опоре, сжимается продольной силой P. Задана относительная жесткость для линейного смещения Δy опоры $a = EJ/(c_1 l^3)$, где c_1 — жесткость пружины ($N_{\text{упр}} = c_1\Delta y$,) или относительная жесткость $b = EJ/(c_2 l)$ для углового смещения*

[1] Воспользуемся Maple. Выполним замену `t:=Pi+x`. Запишем уравнение `eq1:=sin(t)-t*cos(t)+t*t*2*sin(t)`. Используем оператор разложения функций многих переменных: `eq2:=mtaylor(eq1,[x],3)`. В отличие от обычного оператора `taylor` для одной переменной этот оператор не дает остаточный член. Решаем уравнение, из двух решений выбираем одно и возвращаемся к переменной t, добавляя π: `solve(eq2,x)[1]+Pi`.