

№	Метод перемещений			Метод сил N_F
	$N_{\text{лин}}$	$N_{\text{узл}}$	N_{ε}	
1	2	7	9	16
2	5	10	15	17
3	2	9	11	25
4	4	9	13	17
5	1	7	8	18
6	0	7	7	23
7	4	12	16	27
8	0	4	4	14
9	1	3	4	9
10	1	9	10	25

8.4. Многопролетная неразрезная балка

Постановка задачи. Построить эпюры моментов и перерезывающих сил в многопролетной балке.

Статически определяемая балка имеет три связи, представляющие, как правило, одну неподвижную опору, заменяющую две связи (вертикальную и горизонтальную) и подвижную вертикальную. В неразрезных многопролетных балках имеются лишние вертикальные связи — опоры. Их число определяет степень статической неопределимости задачи. Раскрыть статическую неопределимость, т.е. найти реакции лишних опор, можно методом сил, отбрасывая лишние опоры и заменяя их неизвестными метода сил. Однако, значительно удобнее решить задачу с помощью уравнения трех моментов (уравнения Клайперона¹).

План решения

1. Определяем степень статической неопределимости по формуле $C - 3$, где C — число связей.

2. Разрезаем балку на отдельные части (*простые балки*), врезая внутренние шарниры в местах крепления опор. Обозначаем реакции образовавшихся связей — моменты M_0, M_1, \dots, M_n .

3. Нумеруем пролеты (участки балки между опорами). Число пролетов равно $n = C - 2$. Левая консоль считается нулевым пролетом, правая имеет номер $n + 1$. Длины пролетов $l_i, i = 0, \dots, n + 1$.

4. Из условия равновесия консольных частей определяем M_0 и M_n . Остальные моменты являются неизвестными системы $n - 1$ уравнений трех моментов.

¹Клайперон Бенуа Поль Эмиль (1779–1864) — французский физик и инженер, чл.-корр. Петербургской Академии Наук.

5. Строим эпюры моментов M_p и перерезывающих сил Q_p n пролетах и консолях (если они есть) балки от действия внешней нагрузки. Каждый пролет представляет собой отдельную статически определимую балку.

6. Вычисляем площади эпюр моментов Ω_i , $i = 1, \dots, n$ в пролетах и расстояния от центров тяжести этих площадей до левой (a_i) и правой (b_i) опоры соответствующего пролета.

7. Составляем систему уравнений¹ ($i = 1, \dots, n - 1$):

$$M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} = -6 \left(\frac{\Omega_i a_i}{l_i} + \frac{\Omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \quad (8.29)$$

8. Решаем систему уравнений трех моментов. Находим моменты в балке над лишними опорами M_i , $i = 1, \dots, n - 1$.

9. Строим эпюру моментов m_1 от действия реакций M_i , $i = 1, \dots, n - 1$. Эпюра моментов представляет собой ломаную с координатами угловых точек (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n + 2$, где x_i , $i = 1, \dots, n + 1$ — координаты опор, x_0, x_{n+2} — координаты концов балки; $y_0 = y_{n+2} = 0$, $y_i = M_{i-1}$, $i = 1, \dots, n + 1$ — моменты, полученные из решения системы уравнений трех моментов и из условия равновесия консолей (M_0 и M_n).

10. Складываем эпюры M_p и m_1 . Получаем искомую эпюру моментов в неразрезной балке.

11. Строим эпюру перерезывающих сил по формуле

$$Q_i = Q_{pi} + (M_i - M_{i-1})/l_i, \quad (8.30)$$

для пролетов $i = 1, \dots, n$, где Q_{pi} — перерезывающие силы в простой балке.

Пример. К многопролетной статически неопределимой балке (рис. 187) приложена вертикальная сила $P = 9$ кН и равномерно распределенная нагрузка $q_1 = 12$ кН/м, $q_2 = 10$ кН/м. Размеры даны в метрах. Построить эпюры моментов и перерезывающих сил.

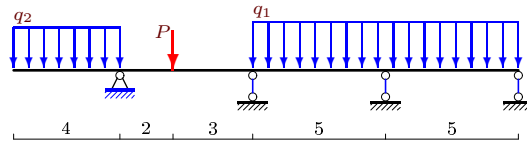


Рис. 187

Решение

¹ Уравнения трех моментов.

1. Определяем степень статической неопределимости по формуле $C - 3$, где C — число связей. Балка имеет $C = 5$ связей — три вертикальные опоры и неподвижная опора (две связи). Таким образом, $C - 3 = 2$, балка дважды статически неопределима.

2. Разрезаем балку на отдельные части (*простые балки*), врезая внутренние шарниры в местах крепления опор (рис. 188). Обозначаем реакции образовавшихся связей — моменты M_0, M_1, \dots, M_n .

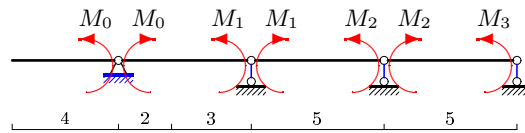
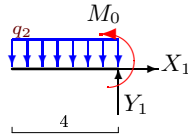


Рис. 188

3. Нумеруем пролеты. Число пролетов равно 3. Левая консоль — нулевой пролет. Длины пролетов $l_0 = 4$ м, $l_1 = l_2 = l_3 = 5$ м.

4. Из условия равновесия консоли определяем M_0 (рис. 189).
Записываем уравнение моментов относительно опоры



$$\sum M_A = q_2 \cdot 4 \cdot 2 + M_0 = 0.$$

Рис. 189

Получаем $M_0 = -80$ кНм. Правая консоль в балке отсутствует, следовательно, $M_3 = 0$. Остальные моменты являются неизвестными системы $n - 1 = 2$ уравнений трех моментов.

5. Строим эпюры моментов M_p и перерезывающих сил Q_p в трех пролетах и консоли от действия внешней нагрузки. Каждый пролет представляет собой отдельную статически определимую балку (рис. 190–192).

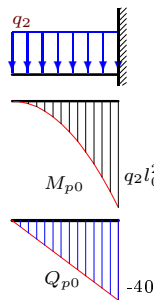


Рис. 190

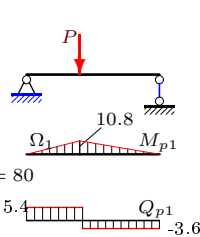


Рис. 191

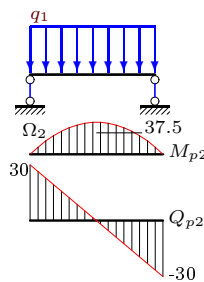


Рис. 192

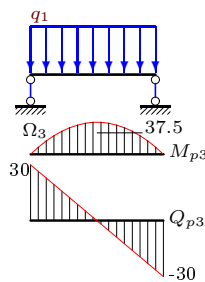


Рис. 193

Высота треугольной эпюры в полете 1 равна $P \cdot 2 \cdot 3/5 = 10.8$. Максимальные значения эпюр в пролетах 2 и 3 равны $f = q_1 l_2^2/8 = q_1 l_3^2/8 = 37.5$ кНм.

6. Вычисляем площади эпюр моментов $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, в пролетах и расстояния от центров тяжести этих площадей до левой (a_i) и правой (b_i), $i = 1, 2, 3$, опоры соответствующего пролета.

$$\Omega_1 = 10.8 \cdot 5 \cdot /2 = 27, \quad a_1 = (2 + 5)/3 = 2.333, \quad b_1 = l_1 - a_1 = 2.667,$$

$$\Omega_2 = \Omega_3 = 2fl_2/3 = 125, \quad a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 2.5.$$

7. Составляем систему уравнений (8.29)

$$l_1 M_0 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(\Omega_1 a_1/l_1 + \Omega_2 b_2/l_2), \quad (8.31)$$

$$l_2 M_1 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6(\Omega_2 a_2/l_2 + \Omega_3 b_3/l_3).$$

Подставляем численные значения длин, моментов и площадей

$$-400 + 20M_1 + 5M_2 = -450.6, \quad (8.32)$$

$$5M_1 + 20M_2 = -750.$$

8. Решаем систему уравнений (8.32). Находим моменты $M_1 = 7.301$ кНм, $M_2 = -39.325$ кНм.

9. Строим эпюру моментов m_1 от действия реакций M_1, M_2 .

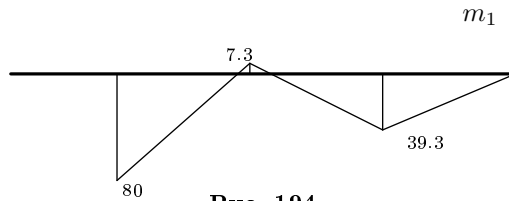


Рис. 194

10. Складываем эпюры M_p (рис. 190–192) и m_1 (рис. 194). Получаем искомую эпюру моментов в неразрезной балке (рис. 195)

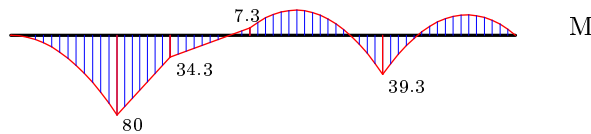


Рис. 195

Значение момента в точке приложения силы P вычисляем по формуле $(80 + 7.301)/5 \cdot 2 + 10.8 - 80 = 34.279$ кНм.

11. Строим эпюру перерезывающих сил по формуле (8.30). Для пролетов 1, 2, 3 имеем следующие добавки к перерезывающим силам в простой балке

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{p1} + (M_1 - M_0)/l_1 = Q_{p1} + (7.301 - (-80))/5 = Q_{p1} + 17.46, \\ Q_2 &= Q_{p2} + (M_2 - M_1)/l_2 = Q_{p2} + (-39.325 - 7.301)/5 = Q_{p2} - 9.325, \\ Q_3 &= Q_{p3} + (M_3 - M_2)/l_3 = Q_{p3} + (0 - (-39.325))/5 = Q_{p3} + 7.865. \end{aligned}$$

В итоге получаем эпюру перерезывающих сил в неразрезной балке (рис. 196)

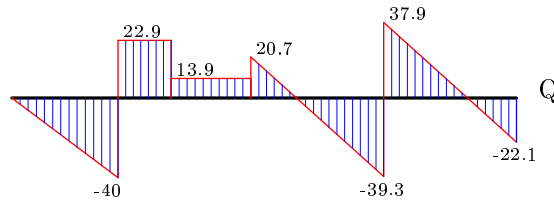


Рис. 196

Замечание 1. С помощью эпюры перерезывающих можно найти реакции опор и выполнить проверку решения. Рассматриваем равновесие элементов балки, вырезанных над опорами. Действие опор заменяем их реакциями Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 (рис. 197 – 200). Значения перерезывающих сил, возникающих как реакции при вырезании элемента, берем из эпюры моментов перерезывающих сил в неразрезной балке (рис. 196). С учетом принятых знаков для Q (положительные перерезывающие силы вращают элемент балки, к которому они приложены по часовой стрелке), имеем

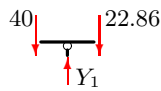


Рис. 197

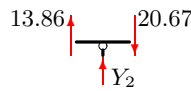


Рис. 198

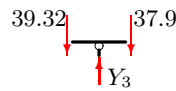


Рис. 199



Рис. 200

Условия равновесия дают

$$\begin{aligned} Y_1 &= 40 + 22.86 = 62.86, & Y_2 &= -13.86 + 20.67 = 6.81, \\ Y_3 &= 39.32 + 37.86 = 77.19, & Y_4 &= 22.14. \end{aligned}$$

В проекции на вертикальную ось записываем сумму проекцию всех внешних сил, действующих на балку,

$$\begin{aligned} \sum Y_k &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - P - 4q_2 - 10q_1 = \\ &= 62.86 + 6.81 + 77.19 + 22.14 - 9 - 40 - 120 = 0. \end{aligned}$$