Глава 4

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

4.1. Плоское напряженное состояние

Напряженное состояние в каждой точке материала характеризуется главными напряжениями $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ и их ориентацией. Если все главные напряжения отличны от нуля, то такое состояние называется трехосным напряженным состоянием, если одно из этих напряжений равно нулю, то напряженное состояние плоское. При одноосном растяжении-сжатии два главных напряжения равны нулю. Плоское напряженное состояние часто встречается в расчетной практике. Как простая приближенная модель такое состояние принимается и в тех трехмерных задачах, где одно из главных напряжений близко к нулю.

Постановка задачи. *К треугольной пластине приложены напряжения, часть которых известна. Из условия равновесия пластины найти недостающие напряжения, проверить ее прочность, определить деформации пластины и смещения ее вершин. Даны модуль упругости, коэффициент Пуассона и расчетное сопротивление материала.*

План решения

1. Определяем знаки известных нормальных и касательных напряжений в осях x и y, пользуясь правилом знаков.

2. Умножаем напряжения на площади граней, на которых они действуют. Получаем силы, приложенные к граням. Из условий равновесия пластины в проекциях на выбранные оси получаем недостающие напряжения.

3. Определяем главные напряжения по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_{min} &= (\sigma_x + \sigma_y)/2 - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

4. Находим максимальное и минимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}), \quad \tau_{min} = -\tau_{max}. \tag{4.2}$$

5. Вычисляем угол наклона главных осей

$$\operatorname{tg}(\alpha_{max}) = \frac{\sigma_{max} - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \tag{4.3}$$

6. Определяем главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 по значениям σ_{min} и σ_{max} с учетом, что одно из главных напряжений равно нулю и $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

7. Рассчитываем деформации пластинки. Вычисляем относительные главные деформации по закону Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x1} &= \varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max} - \nu\sigma_{min}}{E}, \\ \varepsilon_{y1} &= \varepsilon_{min} = \frac{\sigma_{min} - \nu\sigma_{max}}{E}, \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{E}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

и удельное изменение объема $\Delta V/V = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1} + \varepsilon_z$.

8. Определяем искажение формы пластинки, вызванное напряженным состоянием. Находим перемещение вершин треугольника в осях, связанных с его центром тяжести. Вычисляем координаты вершин в центральных осях xy и в повернутых на угол α_{max} осях x_1y_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\ \cos\alpha_{max} + y\ \sin\alpha_{max}, \\ y_1 &= y\ \cos\alpha_{max} - x\ \sin\alpha_{max}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

9. Определяем перемещения вершин, вызванные деформацией $\Delta x_{1k} = x_{1k}\varepsilon_{x1}$, $\Delta y_{1k} = y_{1k}\varepsilon_{y1}$, $k = A, B, C$.

10. Вычисляем приведенные напряжения σ_i и проверяем условие прочности $\sigma_i < R$.

Для различных теорий прочности имеем

I - я гипотеза прочности (материал хрупкий): $\sigma_i = \sigma_1$ или $\sigma_i = |\sigma_3|$, если $\sigma_1 = 0$,

II - я гипотеза прочности (материал хрупкий): $\sigma_i = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$,

III - я гипотеза прочности (материал пластичный): $\sigma_i = \sigma_1 - \sigma_3$,

IV - я гипотеза прочности (материал пластичный)

$$\sigma_i = \sqrt{0.5((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)}\ .$$

Определяем *коэффициент запаса прочности* $k_{пч} = R/\sigma_i$, где R — расчетное сопротивление материала [1], и по критерию $k_{пч} > [k_{пч}]$ оцениваем возможность разрушения или течения материала в

[1] Если в условии задачи задано нормативное сопротивление $R^н$ и коэффициент запаса прочности $k_{пч}$, то расчетное сопротивление материала получаем по формуле $R = R^н/k_{пч}$.

предположении, что материал хрупкий (гипотезы прочности I, II) или пластичный (гипотезы прочности III, IV).

Пример. К треугольной пластине (рис. 53) с заданными размерами $AB = 10$ см, $BC = 7$ см, приложены напряжения в МПа. Из условия равновесия пластины найти недостающие напряжения, проверить ее прочность, узнать деформации пластины и смещения ее вершин. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, нормативное сопротивление $R_n = 100$ МПа, модуль упругости $E = 2$ГПа, $[k_{\text{пч}}] = 1$.

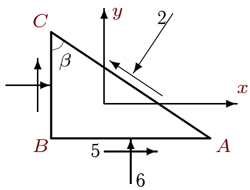

Рис. 52

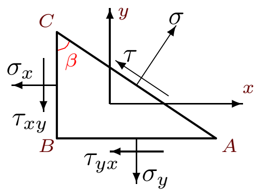

Рис. 53

Решение

1. В соответствии с правилом знаков на рис. 53 получаем величины напряжений на площадках $\sigma_y = -6$ МПа, $\tau_{xy} = -5$ МПа, $\sigma = -2$ МПа. По закону парности $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Неизвестными являются касательное напряжение τ на наклонной площадке и нормальное напряжение σ_x. Векторы этих напряжение изображаем в положительных направлениях.

2. Вычисляем незаданные напряжения. Находим площади граней $F_{BC} = 7 \cdot t$, $F_{AC} = 10 \cdot t$, $F_{AC} = \sqrt{7^2 + 10^2}\, t = 12.21t$, где t — толщина пластины. Записываем уравнения равновесия платины в проекциях на оси с учетом закона парности $\tau_{xy} = \tau_{yx}$:

$$\sum X_i = -\sigma_x \cdot F_{BC} - \tau_{xy} \cdot F_{AB} + \sigma \cdot \cos\beta \cdot F_{AC} - \tau \cdot \sin\beta \cdot F_{AC} = 0,$$
$$\sum Y_i = -\sigma_y \cdot F_{AB} - \tau_{xy} \cdot F_{BC} + \sigma \cdot \sin\beta \cdot F_{AC} + \tau \cdot \cos\beta \cdot F_{AC} = 0,$$

Так как $BC = AC\cos\beta$, $AB = AC\sin\beta$, $\sin\beta = 10/\sqrt{7^2 + 10^2} = 10/12.21 = 0.82$, $\cos\beta = 7/12.21 = 0.57$, система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \sum X_i &= -\sigma_x \cdot 0.57 - \tau \cdot 0.82 + 5 \cdot 0.82 - 2 \cdot 0.57 = 0, \\ \sum Y_i &= \tau \cdot 0.57 + 6 \cdot 0.82 + 5 \cdot 0.57 - 2 \cdot 0.82 = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Решаем систему уравнений (4.6). Получаем: $\tau = -10.71$ МПа, $\sigma_x = 20.45$ МПа.

3. Определяем главные напряжения по формулам (4.1)

$$\sigma_{max} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2} = 21.36 \text{ МПа},$$
$$\sigma_{min} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2} = -6.91 \text{ МПа}.$$

4. Находим максимальное и минимальное касательное напряжение по формулам (4.2)

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{1}{2}(21.36 + 6.91) = 14.14\text{МПа},$$
$$\tau_{min} = -\tau_{max} = -14.14\text{МПа}.$$

5. Вычисляем угол наклона главных осей (4.3)

$$\mathrm{tg}(\alpha_{max}) = \frac{\sigma_{max} - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{21.36 - 20.45}{-5} = -0.18,$$

получаем $\alpha_{max} = -10.36°$.

6. Определяем главные напряжения. Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то $\sigma_1 = 21.36$ МПа, $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = -6.91$ МПа.

7. Рассчитываем деформации пластинки. Вычисляем относительные главные деформации по закону Гука (4.4). С учетом значения модуля Юнга $E = 2 \cdot 10^3$ МПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ получаем

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max} - \nu\sigma_{min}}{E} = \frac{21.36 + 6.91 \cdot 0.3}{2 \cdot 10^3} = 117.18 \cdot 10^{-4},$$
$$\varepsilon_{y1} = \varepsilon_{min} = \frac{\sigma_{min} - \nu\sigma_{max}}{E} = \frac{-6.91 - 21.36 \cdot 0.3}{2 \cdot 10^3} = -66.61 \cdot 10^{-4},$$
$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{E} = -0.3\frac{21.36 - 6.91}{2 \cdot 10^3} = -21.67 \cdot 10^{-4}.$$

Удельное изменение объема: $\Delta V/V = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1} + \varepsilon_z = 28.9 \cdot 10^{-4}$.

8. Определяем искажение формы пластинки, вызванное напряженным состоянием. Находим перемещение вершин треугольника в осях, связанных с его центром тяжести. Вычисляем координаты вершин в центральных осях xy и в повернутых на угол α_{max} осях x_1y_1 по формулам (4.5). С учетом, того что $x_A = x_B + 10$ и $x_C = x_B$, а координата центра тяжести по условию равна нулю, из уравнения $x_0 = 0 = (x_A + x_B + x_C)/3$ получаем $x_B = -3.33$ см, аналогично, из уравнений $y_C = y_B + 7$, $y_A = y_B$, $y_0 = 0 = (y_A + y_B + y_C)/3$ находим $y_A = -2.33$ см. Результаты вычислений заносим в таблицу

	x	y	x_1	y_1
A	6.67	-2.33	6.98	-1.1
B	-3.33	-2.33	-2.86	-2.9
C	-3.33	4.67	-4.12	4