напряжения $\tau_{i,j}$, есть орт оси, нормальный к площадке, на которой это напряжение действует. Второй индекс j указывает орт осей, вдоль которой направлено напряжение. Если внешняя нормаль к площадке направлена по направлению орта i, то положительным касательным напряжением будет то, которое направлено в сторону орта j.

Постановка задачи. *На элементарный объем тела действуют заданные напряжения. Найти главные нормальные и касательные напряжения, относительные главные деформации, относительное изменение объема, октаэдрическое напряжение. Дан модуль упругости материала, и коэффициент Пуассона.*

План решения

1. Пользуясь правилом знаков, определяем величины и знаки приложенных напряжений.

2. Вычисляем инварианты тензора напряжения

$$
\begin{aligned}
&J_1 = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),\\
&J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2,\\
&J_3 = -\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 2\tau_{yz}\tau_{yx}\tau_{xz} + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{yx}^2.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

3. Решаем кубическое уравнение

$$\sigma^3 + J_1\sigma^2 + J_2\sigma + J_3 = 0$$

и находим главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3,

4. Выполняем проверку. Находим инварианты

$$
\begin{aligned}
&J_1 = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),\\
&J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3,\\
&J_3 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

5. Находим направляющие косинусы главных осей. Решаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_y - \sigma_1)\frac{m_1}{l_1} + \tau_{yz}\frac{n_1}{l_1} + \tau_{xy} = 0,\\
&\tau_{xy}\frac{m_1}{l_1} + \tau_{xz}\frac{n_1}{l_1} + (\sigma_x - \sigma_1) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Обозначаем $x_1 = m_1/l_1$, $x_2 = n_1/l_1$. Так как $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$, то с учетом принятых обозначений получаем $l_1 = 1/\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$. Определяем другие направляющие косинусы $m_1 = x_1 l_1$, $n_1 = x_2 l_1$.

6. Проверяем решение: $m_1^2 + n_1^2 + l_1^2 = 1$.

7. Определяем относительные главные деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))/E, \\ \varepsilon_2 &= (\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1))/E, \\ \varepsilon_3 &= (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))/E. \end{aligned} \tag{4.10}$$

8. Вычисляем относительное изменение объема

$$(V_1 - V_0)/V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \tag{4.11}$$

9. Вычисляем главные касательные напряжения

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = -\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{4.12}$$

10. Находим октаэдрическое напряжение

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

Пример. На элементарный объем тела действуют заданные напряжения (рис. 56). Найти главные нормальные и касательные напряжения, относительные главные деформации, относительное изменение объема, октаэдрическое напряжение. Дан модуль упругости материала [1] $E = 1 \cdot 10^5$МПа, и коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$.

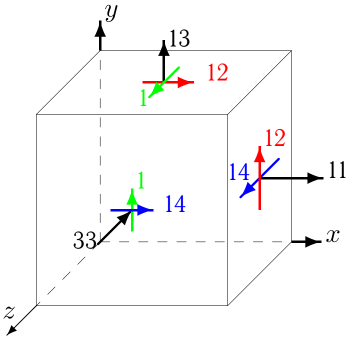

Рис. 56

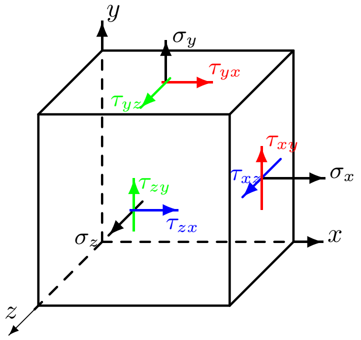

Рис. 57

Решение

[1] Медь или медный сплав.

1. Правило знаков (рис.57) дает следующие компоненты тензора напряжений $\sigma_x = 11$ МПа, $\sigma_y = 13$ МПа, $\sigma_z = -33$ МПа, $\tau_{xy} = 12$ МПа, $\tau_{xz} = 14$ МПа, $\tau_{yz} = 1$ МПа.

2. Вычисляем инварианты напряжения

$$J_1 = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -11 - 13 + 33 = 9 \text{ МПа},$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 = -990 \text{ МПа}^2, \qquad (4.13)$$

$$J_3 = -\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 2\tau_{yz}\tau_{yx}\tau_{xz} + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{yx}^2 = 2190 \text{ МПа}^3.$$

3. Решаем кубическое уравнение

$$\sigma^3 + J_1\sigma^2 + J_2\sigma + J_3 = 0.$$

Используем итерационный метод Ньютона. В скобках указываем номер итерации ($k = 0, 1, ..., n$):

$$\sigma_{(k+1)} = \sigma_{(k)} - \frac{\sigma_{(k)}^3 + J_1\sigma_{(k)}^2 + J_2\sigma_{(k)} + J_3}{3\sigma(k)^2 + 2J_1\sigma_{(k)} + J_2}.$$

Даем начальное приближение $\sigma_{(0)} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = -3$МПа.

$$\sigma_{(1)} = -3 - \frac{(-3)^3 + 9(-3)^2 + 990 \cdot 3 + 2190}{3(-3)^2 - 18 \cdot 3 - 990} = -3 + 5.1268 = 2.1268\text{МПа},$$

$$\sigma_{(2)} = 2.127 - \frac{(2.127)^3 + 9(2.127)^2 - 990 \cdot 2.127 + 2190}{3(2.127)^2 + 18 \cdot 2.127 - 990} = 2.271\text{МПа},$$

$$\sigma_{(3)} = 2.271 - \frac{(2.271)^3 + 9(2.271)^2 - 990 \cdot 2.271 + 2190}{3(2.271)^2 + 18 \cdot 2.271 - 990} = 2.271\text{МПа}.$$

Делим кубическое уравнение $\sigma^3 + 9\sigma^2 - 990\sigma + 2190 = 0$ на $\sigma - 2.27$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\sigma^3 & +9\sigma^2 & -990\sigma & +2190 & \sigma - 2.27 \\ \cline{5-5}
\underline{\sigma^3} & \underline{-2.27\sigma^2} & & & \sigma^2 + 11.27\sigma - 964.4 \\
 & 11.27\sigma^2 & -990\sigma & +2190 & \\
 & \underline{11.27\sigma^2} & \underline{-25.6\sigma} & & \\
 & & -964.4\sigma & +2190 & \\
 & & -964.4\sigma & +2190 &
\end{array}$$

получаем квадратное уравнение

$$\sigma^2 + 11.27\sigma - 964.4 = 0,$$

решаем его и находим еще два значения $\sigma_1^* = 25.93$ МПа, $\sigma_2^* = -37.20$ МПа, или (в порядке убывания) $\sigma_1 = 25.93$ МПа, $\sigma_2 = 2.27$ МПа, $\sigma_3 = -37.20$ МПа.

4. Выполняем проверку. Находим инварианты

$$
\begin{aligned}
&J_1 = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -25.93 - 2.27 + 37.20 = 9\text{МПа},\\
&J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 =\\
&\qquad = 25.93 \cdot 2.27 - 2.27 \cdot 37.2 - 25.93 \cdot 37.2 = -990\text{МПа},\\
&J_3 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -2190\text{МПа}.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Результат совпадает с величинами, вычисленными ранее (4.13).

5. Находим направляющие косинусы главных осей. Решаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_y - \sigma_1)m_1/l_1 + \tau_{yz}n_1/l_1 + \tau_{xy} = 0,\\
&\tau_{xy}m_1/l_1 + \tau_{xz}n_1/l_1 + (\sigma_x - \sigma_1) = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Обозначаем $x_1 = m_1/l_1,\ x_2 = n_1/l_1$. Систему (4.15) записываем в виде

$$
\begin{aligned}
&-12.97x_1 + 1x_2 + 12 = 0,\\
&12x_1 + 14x_2 - 14.97 = 0.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Решаем систему (4.16), находим $x_1 = 0.95$, $x_2 = 0.25$. Затем вычисляем один направляющий косинус $l_1 = 1/\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} = 1/\sqrt{1 + (0.95)^2 + (0.25)^2} = 0.71$, затем другие: $m_1 = x_1 l_1 = 0.95 \cdot 0.71 = 0.68$, $n_1 = x_2 l_1 = 0.25 \cdot 0.71 = 0.18$.

6. Проверяем решение:

$$m_1^2 + n_1^2 + l_1^2 = (0.68)^2 + (0.18)^2 + (0.71)^2 = 0.46 + 0.03 + 0.51 = 1.$$

7. Находим относительные главные деформации

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{25.93 + 0.4 \cdot 34.93}{1.0} \cdot 10^{-5} = 3.99 \cdot 10^{-4},\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)) = \frac{2.27 + 0.4 \cdot 11.27}{1.0} \cdot 10^{-5} = 0.68 \cdot 10^{-4},\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) = \frac{-37.2 - 0.4 \cdot 28.2}{1.0} \cdot 10^{-5} = -4.85 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}
$$

8. Вычисляем относительное изменение объема

$$(V_1 - V_0)/V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (3.99 + 0.68 - 4.85) \cdot 10^{-4} = -0.18 \cdot 10^{-4}.$$

9. Находим главные касательные напряжения $\tau_1 = (2.27{+}37.20)/2 = 19.73$МПа, $\tau_2 = -(-37.20 - 25.93)/2 = 31.56$МПа, $\tau_3 = (25.93 - 2.27)/2 = 11.83$МПа.

10. Находим октаэдрическое напряжение

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} = \frac{2}{3}\sqrt{19.73^2 + 31.56^2 + 11.83^2} = 26.04\text{МПа}.$$