

прочности. В этом случае два последних пункта плана объединяются в один.

5.1. Изгиб балки

Если рассмотреть равновесие выделенной двумя сечениями части балки, то реакции отброшенных частей, согласно аксиоме о связях, надо заменить их реакциями. В общем случае в каждом сечении должно быть три реакции: перерезывающая сила, нормальная сила и реактивный момент. Обычно в задаче о балке предполагается, что внешние силы вертикальные, поэтому нормальных реакций в сечении не возникает и эти реакции при решении не изображают.

В курсах сопротивления материалов, предназначенных для машиностроительных специальностей, принято считать, что моменты изгибающие балку выпуклостью вниз положительные, в противном случае они отрицательные¹. Для положительных перерезывающих Q сил принято правило, согласно которому они стремятся повернуть балку по часовой стрелке (рис. 58).

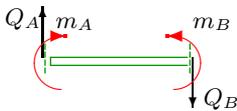


Рис. 58

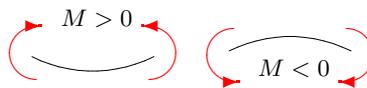


Рис. 59

При этом оказывается, что знак моментов согласуется с принятым в математике знаком кривизны плоской кривой ("правило дождя", рис. 59).

Для определения моментов и сил в сечении можно поступить как в теоретической механике — выполнить в каком-либо месте сечение балки, выбрать левую или правую (в зависимости от числа сил) ее часть и рассмотреть равновесие этой части. Условием равновесия являются уравнения равновесия всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой части балки, включая и реакции связей, соответствующих искомым моментам и силам. Уравнения имеют, например, вид

$$\sum F_{ky} + Q_A = 0, \quad \sum M_{kz} + m_A = 0, \quad (5.1)$$

где F_{ky} и M_k — внешние силы и моменты этих сил относительно места сечения. Решая систему можно получить эпюры моментов $M_A(x)$ и перерезывающих сил $Q_A(x)$ — графики зависимостей этих величин

¹В строительных и архитектурных вузах правило знаков для моментов обратное.

от координаты x места сечения. Введена правая система координат. Ось x направлена вдоль балки, y — вверх, z — перпендикулярно плоскости чертежа на наблюдателя. Положительные значения моментов и перерезывающих сил откладываем по оси y (вверх). Таким образом, эпюра моментов строится на сжатом волокне (рис. 59).

Однако в сопротивлении материалов часто применяют немного более простой метод. Реакции связей в сечении не изображают, и сразу выписывают выражения для моментов и сил, суммируя их с учетом принятого правила знаков. Согласно (5.1), суммы отличаются от реакций знаком. Поэтому положительные направления для суммируемых сил и моментов, по отношению к направлениям реакций обратные. Эти направления отметим в сечении стрелками и дугами со значками Q^+ и m^+ . Поясним все на примерах.

Постановка задачи. Построить эпюры моментов и перерезывающих сил в балке, находящейся под действием вертикальных сосредоточенных и распределенных нагрузок и моментов.

План решения

1. Определяем реакции опор балки. Для этого отбрасываем связи и заменяем их действие двумя вертикальными реакциями R_A и R_B . Горизонтальная реакция одной из связей равна нулю, так как все нагрузки вертикальные. Составляем два уравнения моментов всех сил относительно точек A и B . Решаем уравнения. Определяем R_A и R_B .

2. Выполняем проверку решения. Составляем уравнение проекции на вертикальную ось. Если уравнение удовлетворяется тождественно, то реакции найдены верно ¹.

3. Определяем границы участков балки длиной L для построения эпюр. Границами участков являются концы балки, опоры, точки приложения сосредоточенных сил и моментов, начальные и конечные точки распределенной нагрузки.

4. Выбираем начало координат на левом конце балки ². Разрезаем участок рамы в некоторой произвольной средней точке. Отбрасываем правую часть балки, заменяя ее действие реакциями — моментом M и поперечной силой Q . Реакции на рисунке не изображаем, а указываем

¹ Допускается погрешность, сопоставимая с точностью вычислений. Так, если вычисления производились с точностью до третьего знака после запятой, то невязка в уравнении проверки меньшая по модулю, чем 0.0005 считается допустимой.

² Можно поместить начало координат на любом конце участка, и направить ось x горизонтально в произвольном направлении, однако мы не рекомендуем использовать эту практику, особенно при отсутствии опыта.

правило знаков для их определения. Построение повторяем для всех участков¹.

5. Используя найденные выражения функций на отдельных участках, строим искомые зависимости для всей балки при $0 \leq x \leq L$.

6. Проверяем выполнение дифференциальной зависимости $Q_z = dm_y/dx$.

Пример. Построить эпюры моментов и перерезывающих сил в балке, находящейся под действием вертикальной сосредоточенной нагрузки $P = 2$ кН, распределенной силы $q = 6$ кН/м и момента $m = 10$ кНм (рис. 60). Размеры даны в метрах.

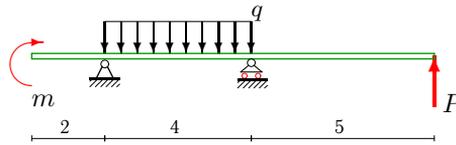


Рис. 60

Решение

1. Определяем реакции опор балки. Для этого отбрасываем связи и заменяем их действие двумя вертикальными реакциями R_A и R_B (рис. 61).

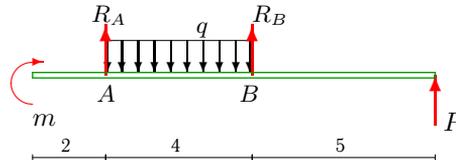


Рис. 61

Составляем два уравнения моментов относительно точек A и B

$$\begin{aligned} \sum M_A &= R_B \cdot 4 + P \cdot 9 - q \cdot 4 \cdot 2 - m = 0, \\ \sum M_B &= -R_A \cdot 4 + P \cdot 5 + q \cdot 4 \cdot 2 - m = 0. \end{aligned}$$

Решаем уравнения. Определяем $R_A = 12$ кН и $R_B = 10$ кН.

2. Выполняем проверку решения. Составляем уравнение проекции на вертикальную ось

$$R_A + R_B + P - q \cdot 4 = 12 + 10 + 2 - 24 = 0.$$

¹ Для последнего участка можно отбросить левую часть.

Уравнение удовлетворяется тождественно, реакции найдены верно.

3. Определяем границы участков балки для построения эпюр. Балка имеет три участка I, II, III (рис. 61). Границами участков являются концы балки, опоры A и B.

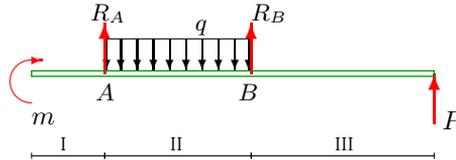
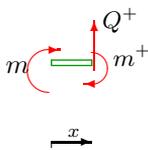


Рис. 62

4. Выбираем начало координат на левом конце балки. Разрезаем участок I рамы в некоторой произвольной средней точке. Для первого участка $0 \leq x \leq 2$. Отбрасываем правую часть балки, заменяя ее действие реакциями — моментом $M(x)$ и поперечной силой $Q(x)$ (на рис. 63 не изображаем). Из условия равновесия оставшейся части определяем реакции $M(x)$ и $Q(x)$ как функции x .



Выписываем значения момента и перерезывающей силы на участке I при $0 \leq x \leq 2$, руководствуясь принятым правилом знаков (рис. 63). К этому участку применен только момент m , поэтому выражения получаются простые

$$M(x) = m, \quad Q(x) = 0.$$

Рис. 63

Для второго участка $2 \leq x \leq 6$ (рис. 64). Распределенную нагрузку q длиной $x - 2$ заменяем равнодействующей $q(x - 2)$, приложенной в ее центре (рис. 65), т.е. на расстоянии $(x - 2)/2$ от ее правого конца.

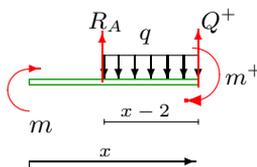


Рис. 64

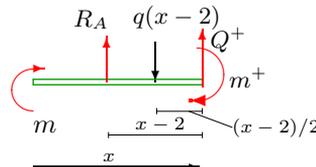


Рис. 65

Выписываем значения момента и перерезывающей силы на участке II при $2 \leq x \leq 6$, руководствуясь принятым правилом знаков. Моменты сил, приложенных к участку балки, берем относительно сечения, т.е. правого конца, со знаком +, если поворот силы виден по часовой

стрелке.

$$M(x) = m + R_A(x - 2) - q(x - 2)^2/2,$$

$$Q(x) = R_A - q(x - 2).$$

Для третьего участка $6 \leq x \leq 11$ (рис. 66). Распределенную нагрузку q на длине 4 м заменяем равнодействующей $4q$, приложенной в середине пролета AB (рис. 67).

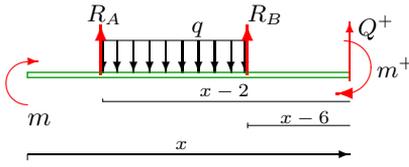


Рис. 66

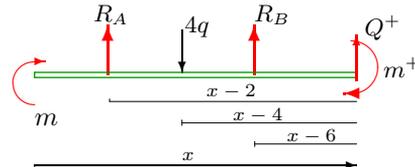


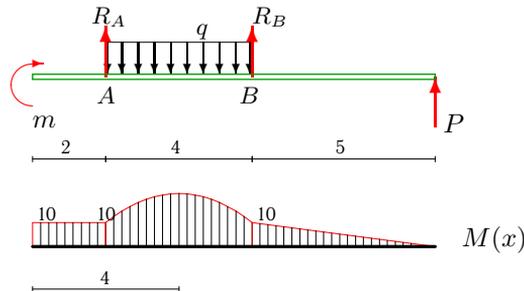
Рис. 67

Выписываем значения момента и перерезывающей силы на участке III при $6 \leq x \leq 11$, руководствуясь принятым правилом знаков. Моменты сил, приложенных к участку балки, берем относительно сечения, т.е. правого конца, со знаком +, если поворот силы виден по часовой стрелке.

$$M(x) = m + R_A(x - 2) + R_B(x - 6) - 4q(x - 4),$$

$$Q(x) = R_A + R_B - 4q.$$

5. Используя найденные выражения функций на отдельных участках, строим искомые зависимости для всей балки при $0 \leq x \leq L$. Для удобства построения, проверки и для большей наглядности эпюры рисуем одну под другой, совмещая также с рисунком балки с нагрузкой (рис. 68).



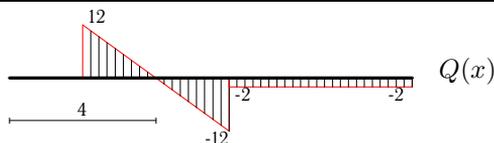


Рис. 68

6. Проверяем выполнение дифференциальной зависимости $Q(x) = dM(x)/dx$. На эпюре Q есть участок II, где перерезывающая сила Q обращается в нуль. Согласно дифференциальной зависимости в этом месте момент имеет максимум. Находим значение $x = x^*$, где $Q(x) = 0$. Для этого приравниваем нулю выражение $Q(x)$ на втором участке $Q(x) = R_A - q(x^* - 2) = 0$, откуда находим $x^* = 4$ м. Вычисляем соответствующее значение момента

$$M(x^*) = m + R_A(x - 2) - q(x - 2)^2/2 = 10 + 12 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 22 \text{ кНм.}$$

Заметим также, что в тех точках, где на балку действуют сосредоточенные силы, там эпюра моментов имеет точку излома, а эпюра перерезывающих сил — скачок. Скачок на эпюре моментов соответствует сосредоточенному моменту. В данном примере он незаметен, так как приходится на начало балки.

Замечание. Значение момента в середине участка длиной l , где действует равномерно распределенная нагрузка q , можно вычислить по формуле $(M_1 + M_2)/2 + ql^2/8$, где M_1 и M_2 — значения эпюры на концах участка.

Для расчета балки приведены две различные Maple-программы на с. 294 и 325. Во второй программе балка рассматривается как частный случай многопролетной разрезной балки. На с. 95 при построении эпюр в арке приведен еще один пример построения эпюры моментов и перерезывающих сил в балке.

Условия задач. Построить эпюры моментов и перерезывающих сил в балке, находящейся под действием силы P , равномерно распределенной нагрузки q и момента m . Размеры даны в метрах.