

нагрузки вызывает в них горизонтальные реакции в опорах. В простых балках и балочных фермах этого эффекта нет.

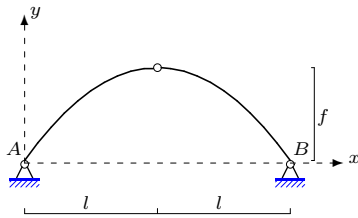


Рис. 78

**Постановка задачи.** Построить эпюры моментов, перерезывающих и нормальных сил в трехшарнирной арке заданной формы.

Будем рассматривать симметричную арку пролетом  $2l$  с высотой (стрелой)  $f$  (рис. 78). Начало координат поместим в левую опору.

#### План решения

1. Определяем вертикальные реакции  $V_A$ ,  $V_B$  опор арки.
2. Определяем распор  $H$  в арке.
3. Строим балочные эпюры моментов  $M_0$  и перерезывающих сил  $Q_0$ . Вычисляем значения  $M_0$  и  $Q_0$  в координатах (точках разбиения пролета арки)  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
4. Вычисляем вспомогательные величины

$$\operatorname{tg} \varphi_i = y'_i, \quad \sin \varphi_i = \operatorname{tg} \varphi_i / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_i}, \quad \cos \varphi_i = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_i}, \quad (5.13)$$

где для параболической арки с началом координат в левой опоре

$$y_i = f x_i(2l - x_i)/l^2, \quad y'_i = 2f(l - x_i)/l^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.14)$$

5. По формуле  $M(x_i) = M_0(x_i) - y(x_i)H$ ,  $i = 1, \dots, n$  строим эпюру моментов  $M$  в арке.
6. По формуле  $Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin \varphi$  строим эпюру перерезывающих сил  $Q$  в арке.
7. По формуле  $N = -Q_0 \sin \varphi - H \cos \varphi$  строим эпюру нормальных сил  $N$  в арке.

**Пример.** Построить эпюры моментов, перерезывающих и нормальных сил в трехшарнирной арке параболической формы. (79). Даны нагрузки  $q = 2$  кН/м,  $P_1 = 9$  кН,  $P_2 = 6$  кН. Размеры указаны в метрах. Для  $x_1 = 10$  м вычислить значения  $M(x_1)$ ,  $Q(x_1)$ ,  $N(x_1)$ . Начало координат находится на левой опоре арки.

#### Решение

1. Определяем вертикальные реакции  $V_A$ ,  $V_B$  опор арки. Освобождаем арку от внешних связей (пятовых опор), заменяя их действием реакциями  $V_A$ ,  $V_B$  и распором  $H$ . В отсутствии внешних горизонтальных нагрузок горизонтальные реакции равны и противоположно направлены (рис. 80). В тех случаях, когда опоры арки находятся на одном уровне,

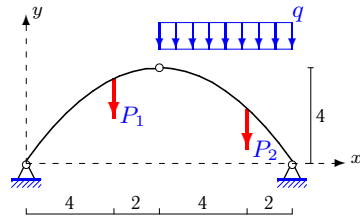


Рис. 79

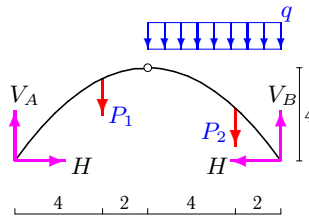


Рис. 80

для определения вертикальных составляющих реакций не требуется разбивать арку на части. Составляем уравнения моментов относительно опор

$$\begin{aligned}\sum M_A &= V_B \cdot 12 - q \cdot 6 \cdot 9 - P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 10 = 0, \\ \sum M_B &= -V_A \cdot 12 + q \cdot 6 \cdot 3 + P_1 \cdot 8 + P_2 \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Решаем уравнения:  $V_A = 10$  кН,  $V_B = 17$  кН. Выполняем проверку решения. Составляем уравнение проекций на ось  $y$ :

$$\sum Y = V_A + V_B - P_1 - P_2 - q \cdot 6 = 10 + 17 - 9 - 6 - 12 = 0.$$

2. Определяем распор  $H$  в арке. Разделяем арку по внутреннему шарниру на две части. Рассматриваем равновесие одной из частей, например, левой (рис. 81).

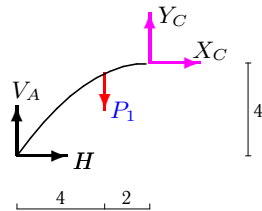


Рис. 81

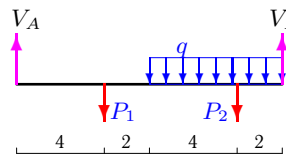


Рис. 82

Действие отброшенной части заменяем неизвестными реакциями связи  $Y_C$ ,  $X_C$ . Составляем сумму моментов сил, действующих на левую часть, относительно шарнира  $C$ :

$$\sum M_B = -V_A \cdot 6 + P_1 \cdot 2 + H \cdot 4 = 0.$$

Отсюда определяем распор  $H = 10.5$  кН.

3. Строим балочные эпюры моментов  $M_0$  и перерезывающих сил  $Q_0$ . Нагрузки на эквивалентную балку, опертую по концам (шарнира в середине нет), изображена на рисунке 82. Построение эпюр в балке подробно описано на с. 77. На первых трех участках  $0 \leq x \leq 4$ ,

$4 \leq x \leq 6$ ,  $6 \leq x \leq 10$  рассматриваем равновесие левой части балки, на последнем при  $10 \leq x \leq 12$  — правой части.

На участке 1 действует одна единственная сила — реакция опоры  $V_A$ . Она направлена вверх и, следовательно, создает на этом участке положительную перерезывающую силу, а относительно сечения она же дает положительный момент. Напомним, что в сечении значками

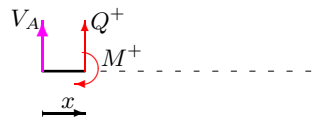


Рис. 83

$M^+$  и  $Q^+$  указаны не реакции, а положительные направления для моментов и сил в выражении для эпюр. Момент и перерезывающая сила на участке 1 балки имеют вид

$$M(x) = V_A x,$$

$$Q(x) = V_A, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

На участке 2 добавляется внешняя сосредоточенная сила  $P_1$ , направленная по отношению к  $V_A$  в противоположную сторону, поэтому в выражения для  $Q$  и  $M$  она входит с обратными знаками. Координата

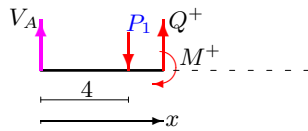


Рис. 84

сечения  $x$  отсчитывается от той же точки, плечо силы  $P$  относительно сечения равно  $x - 4$ . Момент и перерезывающая сила на участке 2 балки имеют вид

$$M(x) = V_A x - P_1(x - 4),$$

$$Q(x) = V_A - P_1, \quad 4 \leq x \leq 6,$$

Выполняя сечение в произвольном месте третьего участка балки, отсекаем часть распределенной нагрузки длиной  $x - 6$ . При интенсивности  $q$  равнодействующая этой части равна  $q(x - 6)$  и приложена в середине участка длиной  $x - 6$ . Плечо равнодействующей

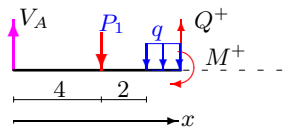


Рис. 85

распределенной нагрузки относительно сечения  $(x - 6)/2$ . Момент и перерезывающая сила на участке 3 балки имеют вид

$$M(x) = V_A x - P_1(x - 4) - q(x - 6)^2/2,$$

$$Q(x) = V_A - P_1 - q(x - 6), \quad 6 \leq x \leq 10,$$

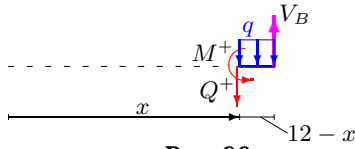


Рис. 86

На последнем участке рассматриваем равновесие правой отсеченной части. Правило знаков меняется на противоположное.

$$M(x) = V_B(12 - x) - q(12 - x)^2/2,$$

$$Q(x) = -V_B + q(12 - x), \quad 10 \leq x \leq 12.$$

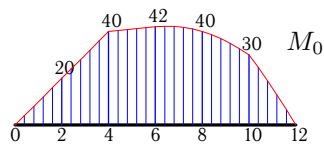


Рис. 87

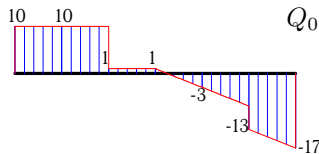


Рис. 88

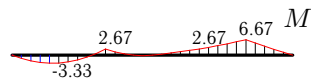


Рис. 89

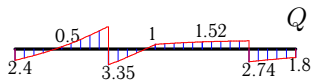


Рис. 90

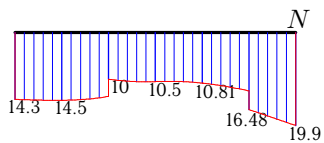


Рис. 91

По характерным точкам на оси арки (концы участков) строим эпюры. В тех участках, где действует распределенная нагрузка, эпюра моментов будет параболической, а эпюра перерезывающих сил линейной с некоторым наклоном. На других участках обе эпюры линейные. Получаем эпюру моментов (рис. 87, в кНм), и эпюру перерезывающих сил (рис. 88, в кН). На третьем участке  $6 \leq x \leq 10$  м, перерезывающая сила обращается в ноль при  $x = 6 + (V_A - P_1)/q = 6.5$  м. Согласно дифференциальной зависимости  $Q = dM/dx$ , момент в этой точке экстремальный,  $M(6.5) = 42.25$  кНм.

4. По формулам (5.13), (5.14) вычисляем вспомогательные величины  $y_i, \operatorname{tg} \varphi_i, \sin \varphi_i, \cos \varphi_i, i = 1, \dots, 7$ . Результаты заносим в таблицу.

Таблица 1

$x$	$y$	$y'$	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
0	0.000	1.333	0.800	0.600
2	2.222	0.889	0.664	0.747
4	3.556	0.444	0.406	0.914
6	4.000	0.000	0.000	1.000
8	3.556	-0.444	-0.406	0.914
10	2.222	-0.889	-0.664	0.747
12	0.000	-1.333	-0.800	0.600

5. По формуле  $M(x_i) = M_0(x_i) - y(x_i)H, i = 1, \dots, 7$  строим эпюру моментов  $M$  в арке (рис. 89).

6. По формуле  $Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin \varphi$  строим эпюру перерезывающих сил  $Q$  в арке (рис. 90).

7. По формуле  $N = -Q_0 \sin \varphi - H \cos \varphi$  строим эпюру нормальных сил  $N$  в арке (рис. 91).

Выписываем отдельно значения  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в заданном сечении:  $M(10) = 6.667$  кНм,  $Q(10) = -2.741$  кН,  $N = -16.485$  кН.

**Замечание 1.** План решения задачи относится и к аркам другой формы. Для круговой арки радиуса  $R$  высотой  $f$  и пролетом  $2l$  с началом координат в левой пяте формулы (5.14) имеют вид

$$y = \sqrt{R^2 - (l - x)^2} + f - R, \quad y'_i = (l - x) / \sqrt{R^2 - (l - x)^2},$$

где  $R = (l^2 + f^2) / (2f)$ . Если арка тех же размеров имеет форму цепной линии, то

$$y = f(2 - \operatorname{ch}(a(1 - x/l))), \quad y'_i = (fa/l) \operatorname{sh}(a(1 - x/l)),$$

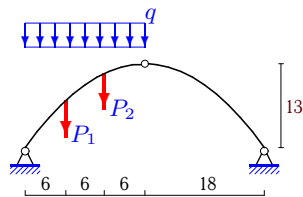
где  $a = \operatorname{arccosh}(2) \approx 1.317$ . Такую форму, но с обратным знаком, имеет тяжелая гибкая нить, подвешенная на двух опорах <sup>1</sup>.

Марле-программа для построения эпюр в арке параболической формы этой задачи дана на с. 317. Алгоритм расчета статически неопределимой двухшарнирной арки методом сил приведен на с. 234.

**Условия задач.** Построить эпюры моментов, перерезывающих и нормальных сил в трехшарнирной арке параболической формы. Для заданного сечения  $x_1$  вычислить значения  $M(x_1)$ ,  $Q(x_1)$ ,  $N(x_1)$ . Начало координат находится на левой опоре арки. Размеры даны в метрах.

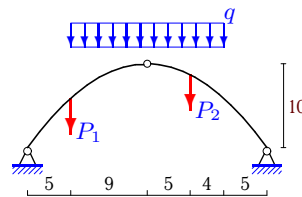
В ответах даны вертикальные реакции  $V_A$ ,  $V_B$ , распор  $H$ , максимальные значения ординат эпюр момента в арке  $M_*$  и соответствующие координаты сечений  $x_M^*$ .

1.



$q = 2$  кН/м,  $P_1 = 2$  кН,  
 $P_2 = 10$  кН,  $x_1 = 6$  м.

2.



$q = 4$  кН/м,  $P_1 = 3$  кН,  
 $P_2 = 9$  кН,  $x_1 = 19$  м.

<sup>1</sup> Другое название цепной линии — катеонида Легея (Legay).