## 8.10. Двухшарнирная арка

Постановка задачи. *Построить эпюры $M$, $Q$, $N$ в двухшарнирной арке параболической формы. Для заданного сечения $x_1$ вычислить значения $M(x_1)$, $Q(x_1)$, $N(x_1)$. Начало координат находится на левой опоре арки.*

План решения

1. Система один раз статически неопределима. В качестве основной системы выбираем трехшарнирную арку. Неизвестной величиной $X_1$ метода сил является момент в замке (рис. 279).

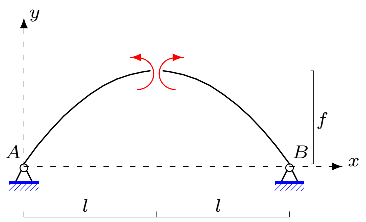


**Рис. 279**

2. Строим эпюру моментов в основной системе. Она совпадает с эпюрой $M_P$ моментов для трехшарнирной арки.

3. Записываем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0, \tag{8.62}$$

где

$$\delta_{11} = \int\limits_L \frac{m_1^2 ds}{EJ} + \int\limits_L \frac{n_1^2 ds}{EF}, \quad \Delta_{1P} = \int\limits_L \frac{m_1 M_P ds}{EJ} + \int\limits_L \frac{n_1 N_P ds}{EF}. \tag{8.63}$$

Эпюру моментов $m_1$ от единичного момента в замке и единичную эпюру нормальных сил $n_1$ легко получить в аналитическом виде. Прикладываем к частям арки единичные моменты по направлению действия неизвестной $X_1$ метода сил. Из условия равновесия всей системы в целом (рис. 280) получаем, что $Y_A = Y_B = 0$.

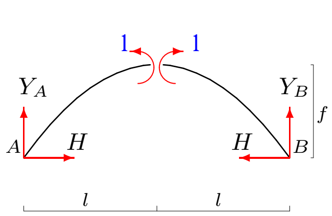


**Рис. 280**

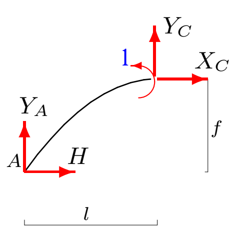


**Рис. 281**

Распор $H$ находим из рассмотрения равновесия левой части арки (рис. 281). Действие отрезанной правой части арки заменяем силами $X_C$, $Y_C$. Составляем уравнение моментов относительно шарнира $C$. Получаем $H = -1/f$.

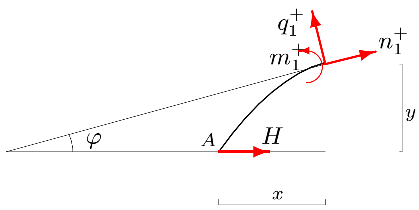


**Рис. 282**

$n_1 = -H\cos\varphi = (1/f)\cos\varphi$, $q_1 = -H\sin\varphi = (1/f)\sin\varphi$, $m_1 = -yH = y/f$. Модуль упругости $E$ и момент инерции $J$ сечения относительно оси его центральной оси $z$ приняты постоянными по длине арки. С учетом того, что площадь прямоугольного сечения $F = bh$, $J = bh^3/12$ и, таким образом, $J/F = h^2/12$, получаем

$$\begin{aligned} EJ\delta_{11} &= \int\limits_L \frac{(y/f)^2 dx}{\cos\varphi} + \frac{h^2}{12f^2}\int\limits_L \cos\varphi\, dx, \\ EJ\Delta_{1p} &= \int\limits_L \frac{(y/f)M_p dx}{\cos\varphi} + \frac{h^2}{12f}\int\limits_L N_p\, dx. \end{aligned} \tag{8.64}$$

4. Интегралы, входящие коэффициенты канонического уравнения, вычисляем по формуле трапеций. Пролет арки разбиваем на $n$ одинаковых участков $\Delta x = 2l/n$. Вычисляем подынтегральное выражение в точках разбиения $x_k = k\Delta x$, $k = 0, ..., n$ и на концах отрезка $[0, 2l]$ и заменяем интеграл суммой

$$\int\limits_0^{2l} g(x)dx = \Delta x\left(\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) + \frac{g(0)+g(2l)}{2}\right) \tag{8.65}$$

5. Решаем уравнение (8.62) и находим $X$. Статическая неопределенность раскрыта.

6. Получаем эпюры в двухшарнирной арке

$$\begin{aligned} M &= M_p + m_1X_1, \\ Q &= Q_p + q_1X_1, \\ N &= N_p + n_1X_1. \end{aligned} \tag{8.66}$$

7. Вычисляем максимальный момент $M_*$ в арке и координату соответственного сечения $x_*$.

**Пример.** Построить эпюры $M$, $Q$, $N$ в двухшарнирной арке параболической формы (рис. 283) с прямоугольным сечением постоянной жесткости. Дана равномерно распределенная нагрузка: $q = 2$ кН/м и две сосредоточенных: $P_1 = 9$ кН, $P_2 = 6$ кН. Высота сечения арки $h = 0.6$ м. Размеры указаны в метрах. Для $x_1 = 4$ м вычислить значения $M(x_1)$, $Q(x_1)$, $N(x_1)$. Начало координат находится на левой опоре арки.

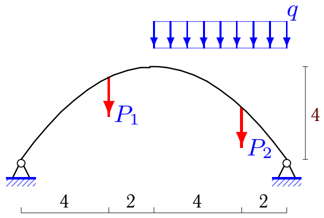


**Рис. 283**

### Решение

Рассчитываемая арка отличается от трехшарнирной статически определимой арки на рис. 89, с. 98 отсутствием шарнира в средней точке пролета (замковый камень).

1. Система один раз статически неопределима. В качестве основной системы выбираем трехшарнирную арку. Неизвестной величиной $X_1$ метода сил является момент в замке.

2. Строим эпюру моментов в основной системе. Она совпадает с эпюрой $M_P$ моментов для трехшарнирной арки (рис. 89, с. 98).

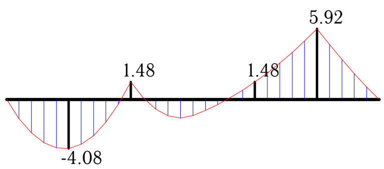


**Рис. 284**

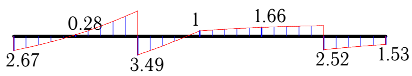


**Рис. 285**

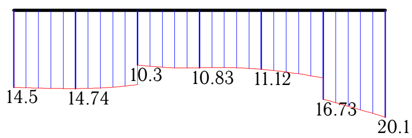


**Рис. 286**

3. Записываем каноническое уравнение метода сил (8.62). Находим коэффициенты. Для вычисления интегралов (8.64) по формуле трапеций (8.65) составляем таблицу

| $x$ | $y/f$ | $(y/f)^2$ | $cos(\varphi)$ | $M_p$ | $N_p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.000 | 0.000 | 0.600 | 0.000 | -14.300 |
| 2.0 | 0.556 | 0.309 | 0.747 | -3.333 | -14.491 |
| 4.0 | 0.889 | 0.790 | 0.914 | 2.667 | -10.001 |
| 6.0 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.000 | -10.500 |
| 8.0 | 0.889 | 0.790 | 0.914 | 2.667 | -10.813 |
| 10.0 | 0.556 | 0.309 | 0.747 | 6.667 | -16.485 |
| 12.0 | 0.000 | 0.000 | 0.600 | 0.000 | -19.900 |

С учетом значений коэффициентов $(h/f)^2/12 = 0.186 \cdot 10^{-2}$, $h^2/(12f) = = 0.75 \cdot 10^{-2}$ получаем следующие значения: $\delta_{11} = 7.142$, $\Delta_{1p} = 9.547$.

5. Решаем уравнение (8.62) и находим $X_1 = -1.337$. Статическая неопределенность раскрыта.

6. Получаем эпюры в двухшарнирной арке

$$\begin{aligned} M &= M_p + m_1 X_1, \\ Q &= Q_p + q_1 X_1, \\ N &= N_p + n_1 X_1. \end{aligned} \tag{8.67}$$

Для суммирования эпюр удобно воспользоваться таблицей:

| $x$ | $m_1X_1$ | $M_p$ | $M$ | $q_1X_1$ | $Q_p$ | $Q$ | $n_1X_1$ | $N_p$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -0.267 | -2.400 | -2.667 | -0.201 | -14.300 | -14.501 |
| 2.0 | -0.743 | -3.333 | -4.076 | -0.222 | 0.498 | 0.276 | -0.250 | -14.491 | -14.741 |
| 4.0 | -1.188 | 2.667 | 1.479 | -0.136 | -3.351 | -3.486 | -0.305 | -10.001 | -10.307 |
| 6.0 | -1.337 | 0.000 | -1.337 | 0.000 | 1.000 | 1.000 | -0.334 | -10.500 | -10.834 |
| 8.0 | -1.188 | 2.667 | 1.479 | 0.136 | 1.523 | 1.659 | -0.305 | -10.813 | -11.119 |
| 10.0 | -0.743 | 6.667 | 5.924 | 0.222 | -2.741 | -2.518 | -0.250 | -16.485 | -16.734 |
| 12.0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.267 | -1.800 | -1.533 | -0.201 | -19.900 | -20.101 |

Maple-программа для расчета двухшарнирной арки параболической формы дана на с. 349.

7. Вычисляем максимальный момент $M_*$ в арке и координату соответственного сечения $x_*$.

| № | $M_p(x_1)$ | $Q_p(x_1)$ | $N_p(x_1)$ | $\delta_{11}$ | $\delta_{1p}$ | $X_1$ | $M(x_1)$ | $Q(x_1)$ | $N(x_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.667 | -3.351 | -10.001 | 7.142 | 9.544 | -1.336 | 1.479 | -3.486 | -10.3064 |