Для того, чтобы продемонстрировать вычисления по формуле Ясинского, немного изменим условие задачи. Пусть длина стержня будет меньше, $l = 3$ м. Гибкость при этом уменьшится

$$\lambda = \mu l / i = 1 \cdot 300/3{,}378 = 88{,}81.$$

В этом случае $\lambda < \lambda_{\text{пц}}$ и стержень потеряет устойчивость в пластической области деформирования. Используем эмпирическую формулу Ясинского [1]. Подставляя в нее заданные в условии задачи коэффициенты [2], получаем критическое напряжение

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1{,}14 \cdot 88{,}81 = 208{,}757 \text{ МПа}.$$

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 1214{,}963 \text{ кН}.$$

Программа расчета критической нагрузки оформлена в виде маплета на с. 466.

**Задача 69.** Шарнирно закрепленный по концам чугунный стержень длиной $l = 1{,}1$ м сжимается силой $P = 100$ кН. Требуется найти размеры квадратного сечения стержня при $[\sigma] = 130$ МПа и коэффициент запаса устойчивости.

**Решение**

Эта задача называется проектировочным расчетом на устойчивость. Будем пользоваться формулой

$$P_{\text{кр}} = [\sigma] F \varphi,$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение (см. табл. 9, с. 483), $\varphi$ — коэффициент продольного изгиба, табл. 10, с. 483. Это нелинейное уравнение относительно размера квадратного сечения $b$. Разрешить его относительно $b$ нельзя, так как коэффициент продольного изгиба $\varphi$ зависит от гибкости, и зависимость дана в табличном виде, а гибкость в свою очередь зависит от поперечного размера сечения. Решим это уравнение методом последовательных приближений.

В соответствии с условием закрепления (см. рис. 438, с. 465) коэффициент приведения длины $\mu = 1$. Площадь квадрата вычисляем по формуле $F = b^2$, момент инерции $J_{min} = b^4/12$. Для первой попытки примем $\varphi_0 = 0{,}5$.

1) Площадь сечения

$$F = \frac{P}{[\sigma]\varphi_0} = \frac{100 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5} \cdot 10^4 = 15{,}38 \text{ см}^2.$$

---

[1] Иногда [14] эту формулу называют по имени Л. Тетмайера (*Ludwig von Tetmajer*, 1850 – 1905).

[2] Для других материалов константы даны в табл. 2.

Зная площадь, находим сторону квадрата $b = \sqrt{F} = \sqrt{15{,}38} = 3{,}92$ см и радиус инерции сечения: $i = \sqrt{J_{min}/F} = \sqrt{(b^4/12)/b^2} = b/\sqrt{12} = 1{,}13$ см. Вычисляем гибкость: $\lambda = l\mu/i = 110 \cdot 1/1{,}13 = 97{,}15$. В таблице 10 такого значения нет. Линейно интерполируя значения таблицы между 0,2 при $\lambda = 90$ и 0,16 при $\lambda = 100$, находим

$$\varphi_1 = 0{,}2 - \frac{0{,}2 - 0{,}16}{10}(97{,}15 - 90) = 0{,}171.$$

Относительная разница

$$\frac{|\varphi_1 - \varphi_0|}{\varphi_0} = \frac{|0{,}171 - 0{,}5|}{0{,}5} = 0{,}66,$$

что больше обычно принятой невязки в 5%.

Примем $\varphi_0 = (0{,}171 + 0{,}5)/2 = 0{,}336$ и повторим расчет.

2) Площадь сечения

$$F = \frac{P}{[\sigma]\varphi_0} = \frac{100 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6 \cdot 0{,}336} \cdot 10^4 = 22{,}91 \text{ см}^2.$$

Сторона квадрата $b = \sqrt{F} = \sqrt{22{,}91} = 4{,}79$ см. Радиус инерции $i = b/\sqrt{12} = 1{,}38$ см. Найдем гибкость $\lambda = l\mu/i = 110 \cdot 1/1{,}38 = 79{,}6$. По таблице интерполируя, между 0,34 при $\lambda = 70$ и 0,26 при $\lambda = 80$, найдем

$$\varphi_1 = 0{,}34 - \frac{0{,}34 - 0{,}26}{10}(79{,}6 - 70) = 0{,}263.$$

Относительная разница

$$\frac{|\varphi_1 - \varphi_0|}{\varphi_0} = \frac{|0{,}263 - 0{,}336|}{0{,}336} = 0{,}22 > 0{,}05.$$

Примем $\varphi_0 = (0{,}263 + 0{,}336)/2 = 0{,}3$ и продолжим расчет.

3) Площадь сечения

$$F = \frac{P}{[\sigma]\varphi_0} = \frac{100 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6 \cdot 0{,}3} \cdot 10^4 = 25{,}69 \text{ см}^2.$$

Сторона квадрата $b = \sqrt{F} = \sqrt{25{,}69} = 5{,}07$ см.

Радиус инерции $i = b/\sqrt{12} = 1{,}46$ см. Найдем гибкость $\lambda = l\mu/i = 110 \cdot 1/1{,}46 = 75{,}18$. По таблице интерполируя, между 0,34 при $\lambda = 70$ и 0,26 при $\lambda = 80$, найдем

$$\varphi_1 = 0{,}34 - \frac{0{,}34 - 0{,}26}{10}(75{,}18 - 70) = 0{,}298.$$

Относительная разница

$$\frac{|\varphi_1 - \varphi_0|}{\varphi_0} = \frac{|0{,}298 - 0{,}3|}{0{,}3} = 0{,}5 \cdot 10^{-2} < 0{,}05,$$

Таким образом, сечение имеет размер $b = 5{,}07$ см и гибкость $\lambda = 75{,}18 < 100$.

Для определения критической силы используем формулу Ясинского для чугуна [1]. Для чугуна имеем: $a = 776$ МПа, $b = 12$ МПа, $c = 0{,}053$ МПа.

$$P_k = F(a - b\lambda + c\lambda^2) = 445{,}46 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса устойчивости $n_{\text{у}} = P_k/P = 4{,}45$.

Константы формулы Ясинского. Таблица 2

| Материал | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| Ст. 2, Ст.3 | 310 | 1,14 |
| Ст.5 | 464 | 3,26 |
| Сталь 40 | 321 | 1,16 |
| Кремнистая сталь | 589 | 3,82 |
| Дерево | 29,3 | 0,194 |

Maple–программа подбора сечения стержня из условия устойчивости приведена на с. 469.

## 4.13. Стабильность

Нестабильность процесса, описываемого дифференциальным уравнением, определяется вырождением связи между приращениями производных функции различных порядков. Явление нестабильности может быть связано с условной бифуркацией процесса [2], выпучиванием

[1] В отличие от стали и дерева здесь нелинейная зависимость.

[2] Простой пример условной бифуркации. Пусть некоторый квазистатический процесс (медленный, поэтому силы инерции не принимаются во внимание) описывается линеаризованным уравнением $a(x,\ \dot{x})\Delta x + b(x,\ \dot{x})\Delta\dot{x} = 0$. Если положить $\Delta\dot{x} = 0$, то при $a(x,\ \dot{x}) = 0$ уравнение допускает ненулевое решение для приращения $\Delta x$ (функция $x(t)$ получает приращение). Под функцией времени $x(t)$ можно понимать прогиб первоначально прямолинейной конструкции (стержень, пластина, оболочка). Условие $\Delta x \neq 0$ означает выпучивание конструкции. Но согласно принятому предположению это произойдет так, что $\Delta\dot{x} = 0$. Из $a(x,\ \dot{x}) = 0$ можно найти соответствующее критическое время. Бифуркацию $x$ при условии $\Delta\dot{x} = 0$ В.Д.Клюшников назвал псевдобифуркацией

## Приложение 2. Допускаемые напряжения и коэффициент продольного изгиба $\varphi$

Допускаемые напряжения, МПа Таблица 9

| | Сталь 2 | Сталь 3 | Сталь 5 | Дюралюминий Д16Т | Чугун серый | Дерево сосна вдоль волокон |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Сжатие | 140 | 160 | 240 | 100 | 120-150 | 10-12 |
| Растяжение | 140 | 160 | 240 | 100 | 28-80 | 7-10 |

Коэффициент продольного изгиба $\varphi$ Таблица 10

| Гибкость $\lambda$ | Ст. 2 Ст. 3 Ст. 4 | Ст.5 | Д16Т | Чугун | Дерево |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,99 | 0,98 | 1,00 | 0,97 | 0,99 |
| 20 | 0,96 | 0,96 | 1,00 | 0,91 | 0,97 |
| 30 | 0,94 | 0,93 | 0,84 | 0,81 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,89 | 0,70 | 0,69 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,85 | 0,57 | 0,57 | 0,80 |
| 60 | 0,86 | 0,80 | 0,46 | 0,44 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,74 | 0,35 | 0,34 | 0,61 |
| 80 | 0,75 | 0,67 | 0,27 | 0,26 | 0,48 |
| 90 | 0,69 | 0,59 | 0,21 | 0,20 | 0,38 |
| 100 | 0,60 | 0,50 | 0,17 | 0,16 | 0,31 |
| 110 | 0,52 | 0,43 | 0,14 | - | 0,26 |
| 120 | 0,45 | 0,37 | 0,12 | - | 0,22 |
| 130 | 0,40 | 0,32 | 0,10 | - | 0,18 |
| 140 | 0,36 | 0,28 | 0,09 | - | 0,16 |
| 150 | 0,32 | 0,25 | 0,08 | - | 0,14 |
| 160 | 0,29 | 0,23 | - | - | 0,12 |
| 170 | 0,26 | 0,21 | - | - | 0,11 |
| 180 | 0,23 | 0,19 | - | - | 0,10 |
| 190 | 0,21 | 0,17 | - | - | 0,09 |
| 200 | 0,19 | 0,15 | - | - | 0,08 |