4.2. Моменты инерции сечения

Моменты инерции плоской фигуры относительно произвольных осей x и y определяются интегралами по площади фигуры

$$J_x = \iint_F y^2 dF, \;\; J_y = \iint_F x^2 dF.$$

Центробежный и полярный моменты инерции равны соответственно

$$J_{xy} = \iint_F xy dF, \;\; J_p = \iint_F (x^2 + y^2) dF = J_x + J_y. \qquad (4.1)$$

Для большинства распространенных в технике форм сечений имеются таблицы моментов инерции (табл. 4–8, с. 478–482) [1].

Задача 49. Найти моменты инерции и ориентацию главных осей сечения, составленного из швеллера 18а, ГОСТ 8240-89, и уголка №6.3/4, ГОСТ 8509-86 (рис. 184).

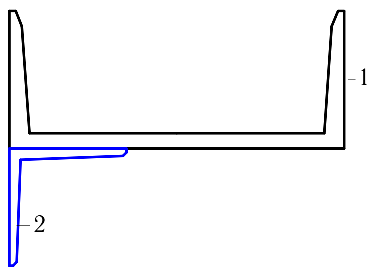

Рис. 184

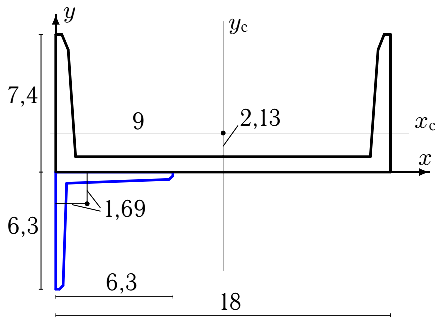

Рис. 185

Решение

1. Вводим произвольную систему координат. Определяем координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение (рис. 185). Согласно табл. 7, с. 481 (строка выделена полужирным шрифтом) имеем:

Фигура 1 (швеллер №18а), $x_1 = 9$ см, $y_1 = 2{,}13$ см. Здесь $y_1 = z_0$, $x_1 = h/2$, где h — стандартное обозначение для высоты швеллера, z_0 — расстояние до центра тяжести согласно таблице 7, с. 481.

Фигура 2 (уголок №6.3/4), согласно таблице 8, с. 482, имеем $x_2 = 1{,}69$ см, $y_2 = -1{,}69$ см.

[1] В Maple, начиная с версии 13, двойной интеграл можно вычислять так: `int(x2,y=0..x,x=0..1)`, а раньше: `int(int(x2,y=0..x),x=0..1)`.

2. Вычисляем площадь всей фигуры. Площадь сечения швеллера 22,2 см^2, уголка — 4,96 см^2: $F = \sum_i F_i = 22{,}2 + 4{,}96 = 27{,}16$ см^2.

3. Определяем координаты центра тяжести составного сечения:

$$x_c = \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{22{,}2 \cdot 9 + 4{,}96 \cdot 1{,}69}{27{,}16} = 7{,}67 \text{ см},$$
$$y_c = \frac{\sum_i F_i y_i}{F} = \frac{22{,}2 \cdot 2{,}13 - 4{,}96 \cdot 1{,}69}{27{,}16} = 1{,}43 \text{ см}. \qquad (4.2)$$

4. Определяем осевые J_{xc}, J_{yc} моменты инерции сечения относительно центральных осей. Моменты инерции швеллера берем из таблицы 7: $J_{xc_1} = 105$ см^4, $J_{yc_1} = 1190$ см^4. Заметим, здесь при работе с таблицей надо согласовать оси. Оси в условии задачи повернуты относительно таблицы на 90°. Для симметричной фигуры $J_{xyc_1} = 0$. С уголком проще, согласно таблице 8: $J_{xc_2} = J_{yc_2} = 18{,}9$ см^4. Итак, вычисляем:

$$J_{xc} = \sum_{i=1}^{2} (J_{xc_i} + (y_c - y_i)^2 F_i) = 105 + 22{,}2 \cdot (2{,}13 - 1{,}43)^2 + \\ + 18{,}9 + 4{,}96 \cdot (1{,}69 + 1{,}43)^2 = 183{,}06 \text{ см}^4,$$
$$J_{yc} = \sum_{i=1}^{2} (J_{yc_i} + (x_c - x_i)^2 F_i) = 1190 + 22{,}2 \cdot (9 - 7{,}67)^2 + \\ + 18{,}9 + 4{,}96 \cdot (1{,}69 - 7{,}67)^2 = 1425{,}54 \text{ см}^4. \qquad (4.3)$$

В табл. 8 на с. 482 указан только *модуль* центробежного момента инерции уголка. Знак определяется его поворотом относительно

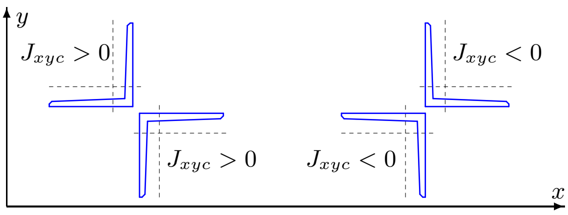

Рис. 186

выбранных осей. Центробежный момент инерции уголка положительный, если его биссектриса лежит в 2 и 4 четвертях и отрицательный, если биссектриса лежит в 1 и 3 четвертях (рис. 186). Таким образом, $J_{xyc_2} = 11$ см^4. Получим

$$J_{xyc} = \sum_{i=1}^{2} (J_{xyc_i} + (x_c - x_i)(y_c - y_i) F_i) = 22{,}2 \cdot (9 - 7{,}67)(2{,}13 - 1{,}43) + \\ + 11 + 4{,}96 \cdot (1{,}69 - 7{,}67)(-1{,}69 - 1{,}43) = 124{,}21 \text{ см}^4.$$

5. Находим главные моменты инерции:

$$J_{\max,\min} = \frac{J_{yc} + J_{xc}}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_{yc} - J_{xc})^2}{4} + J_{xyc}^2} = 804{,}3 \pm 633{,}54, \quad (4.4)$$

$$J_{\max} = 1437{,}84\ \text{см}^4, \quad J_{\min} = 170{,}76\ \text{см}^4.$$

6. Вычисляем главные радиусы инерции: $i_{\max} = \sqrt{J_{\max}/F} = \sqrt{1437{,}84/27{,}16} = 1{,}39$ см, $i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/F} = \sqrt{170{,}76/27{,}16} = 0{,}48$ см.

7. Находим направление главных осей

$$\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{J_{xyc}}{J_{yc} - J_{\max}} = \frac{124{,}21}{1425{,}54 - 1437{,}84} = -10{,}10,$$
$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg}(-10{,}10) = -1{,}47 = -84^\circ. \quad (4.5)$$

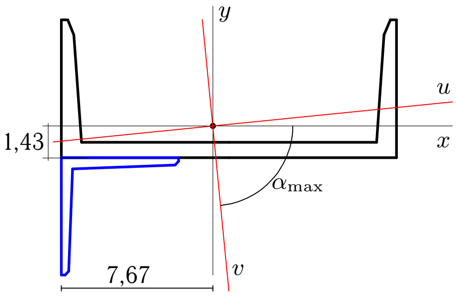

Рис. 187

Направление главных осей можно вычислить также по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\max} = \frac{2J_{xyc}}{J_{yc} - J_{xc}}. \quad (4.6)$$

Угол $\alpha_{\max} < 0$ откладываем по часовой стрелке от положительного направления оси x. Относительно оси v момент инерции фигуры максимальный.

8. Выполняем проверку. Находим тригонометрические функции

$$\sin^2\alpha_{\max} = \operatorname{tg}^2\alpha_{\max}/(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_{\max}) = 0{,}99,$$
$$\cos^2\alpha_{\max} = 1/(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_{\max}) = 0{,}01,$$
$$\sin 2\alpha_{\max} = 2\operatorname{tg}\alpha_{\max}/(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_{\max}) = -0{,}20.$$

Проверяем соотношение

$$J_{xc}\cos^2\alpha_{\max} + J_{yc}\sin^2\alpha_{\max} - J_{xyc}\sin 2\alpha_{\max} = J_{\max},$$
$$J_{xc}\sin^2\alpha_{\max} + J_{yc}\cos^2\alpha_{\max} + J_{xyc}\sin 2\alpha_{\max} = J_{\min}. \quad (4.7)$$

Имеем

$$J_{\max} = 183{,}06 \cdot 0{,}01 + 1425{,}54 \cdot 0{,}99 + 124{,}21 \cdot 0{,}20 = 1437{,}84\ \text{см}^4,$$
$$J_{\min} = 183{,}06 \cdot 0{,}99 + 1425{,}54 \cdot 0{,}01 - 124{,}21 \cdot 0{,}20 = 170{,}76\ \text{см}^4.$$

Такие же значения получены в п.5. Проверка выполнена.

Замечание 1. В качестве проверки можно сначала вычислить моменты инерции всей фигуры относительно заданных осей

$$J_x = \sum_i (J_{x_i} + y_i^2 F_i), \;\; J_y = \sum_i (J_{y_i} + x_i^2 F_i),$$
$$J_{xy} = \sum_i (J_{xy_i} + x_i y_i F_i),$$

а затем уже пересчитать результаты относительно центральных осей. Центральные моменты инерции имеют вид

$$J_{xc} = J_x - y_c^2 F, \quad J_{yc} = J_y - x_c^2 F, \;\; J_{xyc} = J_{xy} - x_c y_c F. \tag{4.8}$$

Замечание 2. В тех случаях, когда для уголков в сортаменте не указан центробежный момент инерции J_{xy}, его легко вычислить по формуле (4.4), из которой в случае *равнополочных* уголков $J_{xc} = J_{yc}$ следует $J_{xy} = J_{\max} - J_{xc}$.

Задача 50. Найти максимальный и минимальный моменты инерции плоской фигуры (рис. 188) и угол наклона главной оси инерции к оси x. Размеры даны в сантиметрах.

Решение

1. Вводим систему координат. Разбиваем фигуру на пять частей: один квадрат размером 7×7см (фигура №1) и четыре вырезанных из него фигуры — два треугольника (№2, №3), прямоугольник №4, и четверть круга №5 радиусом $R = 2$ см (рис. 189) [1]. Определяем координаты центров тяжести фигур:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 7/2 = 3{,}5 \text{ см}, & y_1 = 7/2 = 3{,}5 \text{ см}, \\
x_2 = 4/3 = 1{,}33 \text{ см}, & y_2 = 2/3 = 0{,}67 \text{ см}, \\
x_3 = 5 + 4/3 = 6{,}33 \text{ см}, & y_3 = (2/3) \cdot 4 = 2{,}67 \text{ см}, \\
x_4 = 5/2 = 2{,}5 \text{ см}, & y_4 = 6 + 0{,}5 = 6{,}5 \text{ см}, \\
x_5 = 4R/(3\pi) = 0{,}85 \text{ см}, & y_5 = 4 + 4R/(3\pi) = 4{,}85 \text{ см}.
\end{array}$$

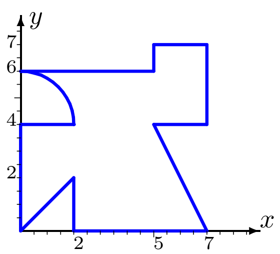

Рис. 188

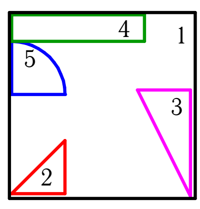

Рис. 189

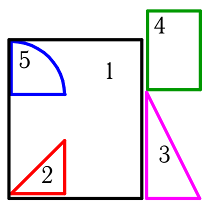

Рис. 190

[1] Возможно и другое разбиение на части (рис. 190). Здесь из прямоугольника №1 вырезаны четверть круга №5 и треугольник №2. К полученной фигуре добавлен треугольник №3 и прямоугольник №4.