С учетом известных координат имеем отсюда

$$4\omega_{1z} + 4\omega_{3z} = 0,$$
$$3\omega_{1z} - 4\omega_{2z} = 0.$$

Решаем систему с учетом известной угловой скорости $\omega_{1z} = 4$ с$^{-1}$ и находим $\omega_{2z} = 3$ с$^{-1}$, $\omega_{3z} = -4$ с$^{-1}$.

Записываем уравнения трех угловых ускорений (2.10):

$$\varepsilon_{1z}(x_2 - x_1) + \varepsilon_{2z}(x_3 - x_2) + \varepsilon_{3z}(x_4 - x_3) - \\ - \omega_{1z}^2(y_2 - y_1) - \omega_{2z}^2(y_3 - y_2) - \omega_{3z}^2(y_4 - y_3) = 0,$$
$$\varepsilon_{1z}(y_2 - y_1) + \varepsilon_{2z}(y_3 - y_2) + \varepsilon_{3z}(y_4 - y_3) + \\ + \omega_{1z}^2(x_2 - x_1) + \omega_{2z}^2(x_3 - x_2) + \omega_{3z}^2(x_4 - x_3) = 0.$$

С учетом известных координат и $\varepsilon_{1z} = 0$ эти уравнения примут вид

$$4\varepsilon_{3z} - 3\omega_{1z}^2 + 4\omega_{2z}^2 = 0,$$
$$-4\varepsilon_{2z} + 4\omega_{1z}^2 + 4\omega_{3z}^2 = 0.$$

Подставляя найденные угловые скорости, находим $\varepsilon_{2z} = 32$ с$^{-2}$, $\varepsilon_{3z} = 3$ с$^{-2}$. Ответы получаются те же.

Заметим, что вместо уравнений трех угловых скоростей можно использовать граф $O \xrightarrow[\varphi]{1} A \xrightarrow[-\pi/2]{2} B \xrightarrow[0]{3} C$.

Maple–программа для решения этой задачи дана на с. 375.

2.5. Механизм с муфтой

Задача 27. Стержень BD шарнирно соединен с горизонтальным ползуном B и проходит сквозь муфту C, вращающуюся на стержне

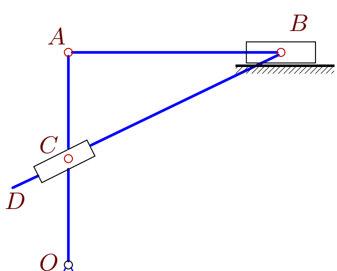


Рис. 116

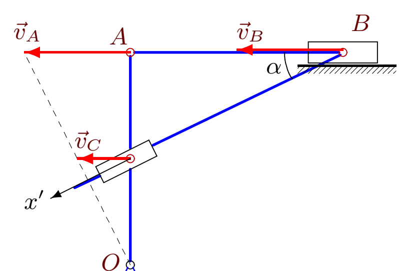


Рис. 117

OA (рис. 116). Угловая скорость OA постоянна и равна ω. Дано: $OC = CA = l$, $AB = 2l$, $AB \perp AO$. Найти скорость и ускорение стержня BD относительно муфты в указанном положении.

Решение

Муфту C будем рассматривать как точку, совершающую сложное движение: относительное движение по стержню и переносное движение вместе со стержнем. Абсолютное движение — движение точки C по окружности с центром в точке O с постоянной скоростью ωl.

1. *Скорость.* Абсолютная скорость C (скорость точки C на стержне OA) равна по модулю ωl (рис. 117). Переносной скоростью является скорость точки C стержня BD, совпадающей в данный момент с муфтой. Она выражается по формуле для скоростей точек тела при плоском движении через скорость полюса B: $\vec{v}_{\text{п}} = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$, где $\vec{v}_{CB} = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{BC}$. Так как AB в данный момент движется мгновенно-поступательно (МЦС стержня — в бесконечности), то $v_B = v_A = 2\omega l$. С другой стороны, по формуле сложения скоростей для сложного движения точки

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{\text{п}} + \vec{v}_{\text{от}} = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{\text{от}}. \tag{2.23}$$

В этом векторном уравнении две неизвестных величины — модули векторов $\vec{v}_{\text{от}}$ и $\vec{v}_{CB}$. Направления всех векторов известны. Это позволяет решить уравнение графически.

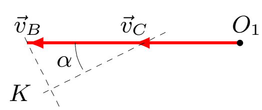


Рис. 118

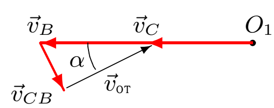


Рис. 119

Начнем с суммы векторов в *правой* части уравнения (2.23). Отложим от некоторой точки O_1 вектор $\vec{v}_B$ известной длины (рис. 118). От его конца проведем прямую, перпендикулярную BC, — на этой прямой лежит вектор $\vec{v}_{CB}$. Обозначим ее пунктиром. К концу вектора $\vec{v}_{CB}$ надо провести прямую, параллельную BC. Эта прямая дает направление последнего слагаемого в правой части (2.23) — относительной скорости $\vec{v}_{\text{от}}$. *Левая* часть уравнения — это вектор $\vec{v}_C$. Конец вектора $\vec{v}_{\text{от}}$ должен попасть в конец вектора $\vec{v}_C$, отложенного от той же точки O_1, что и $\vec{v}_B$. Тем самым утверждается равенство левой и правой части в (2.23). Проведем вектор $\vec{v}_C$. Его длина известна и равна ωl. Через конец $\vec{v}_C$ проведем пунктир под углом α до пересечения его с первым пунктиром. Точка пересечения двух пунктирных линий K определяет величины скоростей $\vec{v}_{\text{от}}$ и $\vec{v}_{CB}$ (рис. 119). Из прямоугольного треугольника получаем значения

$$v_{\text{от}} = |\vec{v}_B - \vec{v}_C| \cos\alpha = \omega l \cos\alpha = (2/\sqrt{5})\omega l,$$
$$v_{CB} = |\vec{v}_B - \vec{v}_C| \sin\alpha = \omega l \sin\alpha = (1/\sqrt{5})\omega l.$$

Уравнение (2.23) можно решить аналитически. Спроецируем его на ось x', направленную по стержню BC. В полученное соотношение не войдет слагаемое $\vec{v}_{CB} \perp x'$, содержащее неизвестную угловую скорость ω_{CB}. Получим уравнение $\omega l \cos\alpha = -v_{\text{от}} + 2l\omega\cos\alpha$, откуда получаем тот же результат: $v_{\text{от}} = (2/\sqrt{5})\omega l$.

Для определения ускорения потребуется значение угловой скорости стержня BC (переносная угловая скорость). Так как $BC = l\sqrt{5}$, то

$$\omega_{\text{п}} = v_{CB}/BC = \omega/5. \tag{2.24}$$

2. *Ускорение*. Так как угловая скорость стержня OA постоянна, то $\varepsilon = 0$, и ускорение точки C в абсолютном движении имеет только центростремительную компоненту: $a_C = \omega^2 l$. По теореме о сложении ускорений (теорема Кориолиса[1])

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{п}} + \vec{a}_{\text{К}}, \tag{2.25}$$

где $\vec{a}_{\text{от}}$ — искомое ускорение, $\vec{a}_{\text{п}}$ — переносное ускорение,

$$\vec{a}_{\text{К}} = 2\vec{\omega}_{\text{п}} \times \vec{v}_{\text{от}} \tag{2.26}$$

— ускорение Кориолиса. Рассмотрим переносное ускорение — ускорение точки C стержня, совершающего плоское движение (рис. 120).

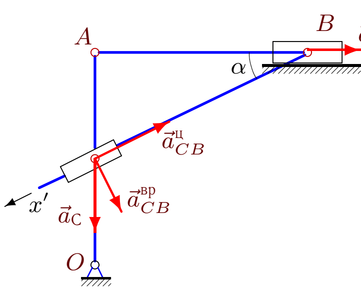


Рис. 120

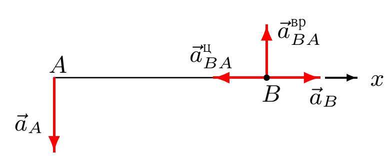


Рис. 121

Возьмем точку B за полюс. Согласно формуле Ривальса (2.6) имеем

$$\vec{a}_{\text{п}} = \vec{a}_B + \vec{a}^{\text{ц}}_{CB} + \vec{a}^{\text{вр}}_{CB}. \tag{2.27}$$

Заметим, что в этой задаче получается две точки C и, соответственно, два ускорения $\vec{a}_C$. Будем различать точку C — ось, на которой вращается муфта, и точку C, принадлежащую стержню. Ускорение первой точки — абсолютное ускорение, ускорение второй — переносное. Ускорение $\vec{a}_B$ вычислим через ускорение $\vec{a}_A$. Вектор ускорения ползуна, движущегося прямолинейно, направлен по линии скольжения

[1] *Gaspar Gustav de'Coriolis* (1792–1843) — французский математик.

горизонтально. Очевидно, при ω =const имеем $a_A = 2l\omega^2$ и $\vec{a}_A \perp AB$ (рис. 121). Пользуясь формулой Ривальса, записываем

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{ц}} + \vec{a}_{BA}^{\text{вр}}. \tag{2.28}$$

Здесь $a_{BA}^{\text{ц}} = \omega_{AB}^2 AB = 0$, так как стержень движется мгновенно поступательно и $\omega_{AB} = 0$. Из проекции (2.28) на ось x сразу же получаем $a_B = 0$.

Вернемся к уравнению (2.27). Центростремительное ускорение $a_{CB}^{\text{ц}}$ можно легко найти. С учетом уже известной переносной угловой скорости (2.24) имеем $a_{CB}^{\text{ц}} = \omega_{\text{п}}^2 CB = (\omega/5)^2 l\sqrt{5}$. Величину ускорения Кориолиса вычисляем по формуле (2.26). Направление этого вектора определяем по правилу Жуковского[1] поворотом на 90° вектора относительной скорости по направлению переносного вращения. В данном случае вращение происходит против часовой стрелки (это определяется направлением вектора $\vec{v}_{CB}$ — он оказался направлен вниз (рис. 119), указывая тем самым поворот стержня вокруг B против часовой стрелки). Перепишем (2.25) в виде $\vec{a}_C = \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{К}} + \vec{a}_{CB}^{\text{ц}} + \vec{a}_{CB}^{\text{вр}}$. Проецируем это уравнение на ось x' (рис. 122) и получаем $a_C \sin\alpha = a_{\text{от}} - a_{CB}^{\text{ц}}$. Отсюда находим $a_{\text{от}} = (6\sqrt{5}/25)\omega^2 l$. Еще один способ вычисления скоростей точек механизмов с муфтой, справедливый в некоторых частных случаях, описан в решении задачи 39, с. 107. Отметим, что вычисление величины ускорения Кориолиса не потребовалось.

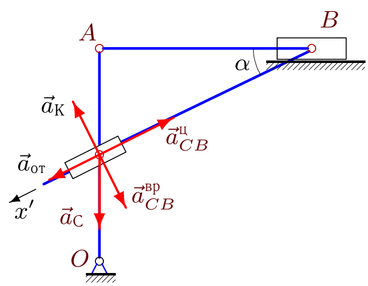
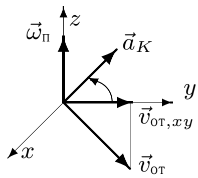


Рис. 122

[1] *Жуковский Николай Егорович* (1847–1921) — русский ученый, основоположник гидроаэродинамики. Преподавал теоретическую механику в МГУ. Правило Жуковского определения направления ускорения Кориолиса основано на простой интерпретации правила векторного произведения. Согласно этому правилу, надо спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости. Затем получившуюся проекцию $\vec{v}_{\text{от},xy}$ следует повернуть в указанной плоскости по направлению переносного вращения. Это и будет искомое направление ускорения Кориолиса. В задаче 27 движение точки происходит в плоскости, поэтому проецировать вектор скорости не требуется. Для определения направления ускорения Кориолиса достаточно только повернуть его на 90°.



Maple–программа для решения этой задачи координатным методом дана на с. 379.

Задача 28. Механизм состоит из четырехзвенника $OABC$ и муфты, скользящей по кривошипу OA. Муфта соединена стержнем DB с шарниром B (рис. 123). Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OAz} = 3$ с$^{-1}$. Даны размеры $OA = 40$ см, $AB = 111$ см, $BC = 43$ см, $DB = 99{,}3$ см. Найти скорости и ускорения шарниров A, B, а также скорость и ускорение муфты D относительно кривошипа OA в момент, когда $\alpha = 45°$.

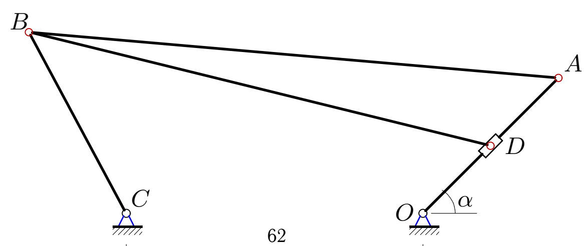


Рис. 123

Решение

1. План решения

Абсолютное движение муфты представим в виде суммы относительного движения по звену OA и переносного вместе с ним. Траекторией относительного движения является прямая, переносного движения — окружность с центром в точке O. По теореме сложения скоростей абсолютная скорость $\vec{v} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}$. Абсолютное ускорение вычисляется по теореме Кориолиса $\vec{a} = \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{п}} + \vec{a}_{\text{К}}$. Неизвестные абсолютные скорость и ускорение выражаются через соответствующие величины полюса B

$$\vec{v} = \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB},$$

$$\vec{a} = \vec{a}_D = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_{DB}^{\text{ц}} + \vec{a}_{DB}^{\text{вр}}.$$

В результате для $\vec{v}_{\text{от}}$ и $\vec{a}_{\text{от}}$ имеем два основных векторных уравнения:

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{DB} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}, \tag{2.29}$$

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_{DB}^{\text{ц}} + \vec{a}_{DB}^{\text{вр}} = \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{п}} + \vec{a}_{\text{К}}. \tag{2.30}$$

Решение этих уравнений можно выполнить *графически* и *аналитически*. Таким образом, имеем следующий план решения:

1) расчет скоростей четырехзвенника $OABC$;

2) определение $\vec{v}_{\text{от}}$ по формуле (2.29);

3) расчет ускорений четырехзвенника $OABC$;
4) определение $\vec{a}_{\text{от}}$ по формуле (2.30).

2. Графическое решение

1) *Расчет скоростей.*

Существуют два способа графического расчета скоростей механизма: построение *плана скоростей* и расчет с помощью *мгновенных центров* скоростей. Используем первый способ. Сначала с помощью циркуля, линейки и транспортира на миллиметровой бумаге построим в масштабе сам механизм. Пронумеруем стержни.

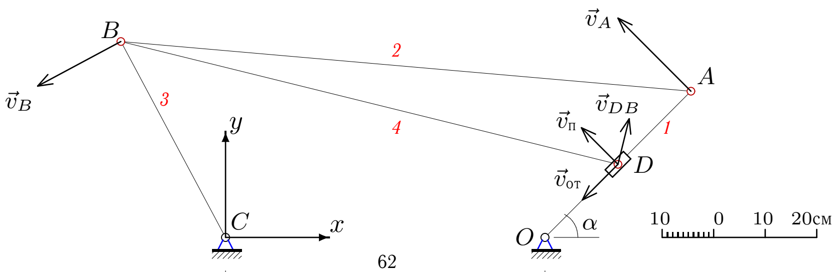


Рис. 124. *Направление векторов скоростей и оси координат*

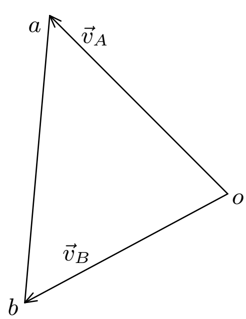


Рис. 125. *План скоростей*

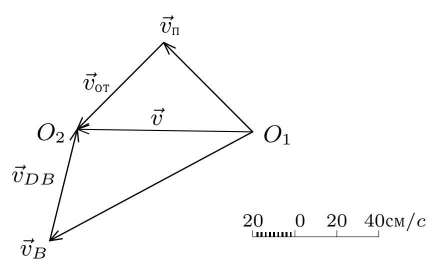


Рис. 126. *Определение $\vec{v}_{\text{от}}$*

План скоростей механизма начнем с построения вектора скорости точки A. Величина скорости равна

$$v_A = \omega_1 OA = 3 \cdot 40 = 120 \text{ см/с}.$$

Направление вектора — перпендикулярно радиусу OA (рис. 124) против часовой стрелки (т. к. $\omega_{1z} > 0$). Откладываем этот вектор от произвольной точки, обозначенной буквой o (рис. 125). Конец вектора отмечаем буквой a. Через точку o проводим прямую, параллельную направлению вектора скорости шарнира B, перпендикулярно радиусу CB траектории вокруг C. На этой прямой должна лежать точка b — конец вектора $\vec{v}_B$. По основному свойству плана скоростей $\vec{ab} \perp \vec{AB}$. Через точку a перпендикулярно AB проводим вторую прямую. Пересечение проведенных прямых дает искомую точку b и, следовательно, длину вектора $v_B = 109{,}7$ см/с (измеряем в масштабе) и угловую скорость звена AB

$$\omega_2 = ab/AB = 137{,}2/111 = 1{,}24 \text{ с}^{-1}.$$

Непосредственное измерение на чертеже дает $OD = 20$ см. Точка в этот момент оказалась на середине стержня. Найдем переносную скорость — скорость той точки звена OA, которая совпадает в данный момент с положением муфты: $v_\text{п} = v_D = 3 \cdot 20 = 60$ см/с. Вектор $\vec{v}_\text{п}$ направлен перпендикулярно звену OA в сторону вращения.

2) *Определение* $\vec{v}_\text{от}$.

Равенство (2.29) представим графически. От некоторой точки O_1 отложим вектор $\vec{v}_\text{п}$, известный по величине и направлению, рис. 126. От его конца мы должны отложить вектор $\vec{v}_\text{от}$, известный лишь направлением (вдоль OA). Проведем через конец $\vec{v}_\text{п}$ прямую, параллельную OA. Рассмотрим теперь левую часть равенства (2.29). От точки O_1 проведем вектор v_B, а через его конец прямую, перпендикулярную DB (на ней лежит неизвестный пока вектор $\vec{v}_{DB}$). Точка O_2 пересечения двух построенных прямых определяет вектор абсолютной скорости $\vec{v}$ и величины векторов $v_\text{от} = 58{,}4$ см/с и $v_{DB} = 54{,}4$ см/с (измеряем в масштабе). Отсюда найдем необходимую в дальнейшем угловую скорость

$$\omega_4 = v_{DB}/DB = 54{,}4/99{,}3 = 0{,}55 \text{ с}^{-1}.$$

3) *Расчет ускорений четырехзвенника OABC.*

Ускорение точки A, лежащей на стержне OA, совершающем вращательное движение с постоянной угловой скоростью 3 с$^{-1}$, определяется аналитически: $a_A = \omega_1^2 OA = 9 \cdot 40 = 360$ см/с^2.

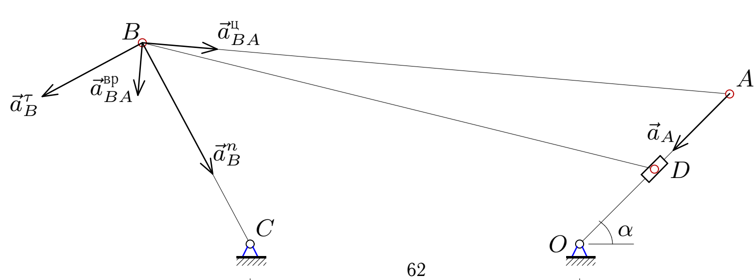


Рис. 127. *Направления векторов ускорения*

Ускорение точки B определим из векторного уравнения

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{ц}} + \vec{a}_{BA}^{\text{вр}},$$

решение которого найдем графически. Для этого вычислим предварительно модули векторов $a_B^n = v_B^2/BC = 109{,}7^2/43 = 280$ см/с^2, $a_{BA}^{\text{ц}} = \omega_4^2 DB = 0{,}55^2 \cdot 99{,}3 = 29{,}8$ см/с^2. От некоторой точки O_1 (рис. 128) строим план ускорений. Откладываем один за другим известные вектора $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^{\text{ц}}$. К концу последнего проводим перпендикуляр к AB — на нем должен лежать вектор $\vec{a}_{BA}^{\text{вр}}$. От той же точки O_1 откладываем $\vec{a}_B^n$ и перпендикуляр к нему ($\vec{a}_B^\tau$). Пересечение двух перпендикуляров дает точку O_2 — конец искомого вектора $\vec{a}_B$. Измерим длины построенных векторов. Получим $a_B = 380$ см/с^2 и касательное ускорение $a_B^\tau = 257$ см/с^2. Ускорение точки D (переносное для муфты) определим по формуле $a_D = a_{\text{п}} = \omega_1^2 OD = 9 \cdot 20 = 180$ см/с^2.

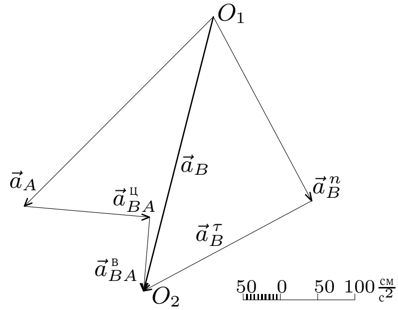


Рис. 128. *План ускорений*

4) *Определение* $\vec{a}_{\text{от}}$.

Направления всех векторов, входящих в уравнение (2.30), изобразим на чертеже механизма.

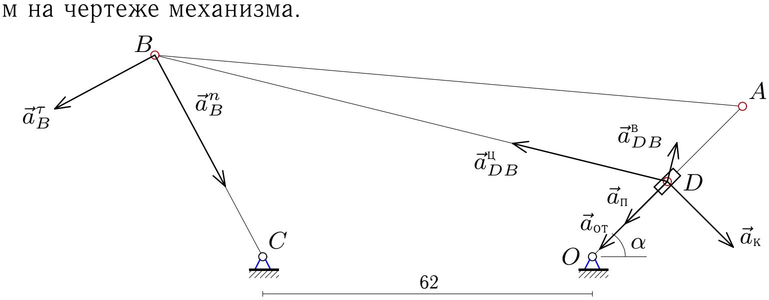


Рис. 129

Направление вектора ускорения Кориолиса получается поворотом вектора относительной скорости $\vec{v}_{\text{от}}$ по часовой стрелке ($\omega_{\text{п}} = \omega_{1z} > 0$). Модули некоторых векторов из (2.30) можно вычислить. Так как вектор переносной угловой скорости перпендикулярен плоскости чертежа, а следовательно, и относительной скорости, то $a_{\text{К}} = 2\omega_{\text{п}} v_{\text{от}} \sin 90^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 58{,}4 = 350{,}2$ см/с^2. Зная ω_4, найдем $a_{DB}^{\text{ц}} = \omega_4^2 DB = 0{,}55^2 \times 99{,}3 = 29{,}9$ см/с^2. Величины $a_{\text{п}} = 180$ см/с^2, $a_B^n = 280$ см/с^2

и $a_B^\tau = 257$ см/с^2 найдены ранее. По аналогии с предыдущими графическими построениями, от некоторой точки O_1 (рис. 130) отложим отдельно известные вектора из левой и правой части уравнения (2.30). Сначала последовательно построим векторы $\vec{a}_\text{К}$ и $\vec{a}_\text{п}$. Получим точку O_2, от которой надо провести прямую по направлению искомого ускорения $\vec{a}_\text{от}$. Направление задает положение кривошипа под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Сумму векторов $\vec{a}_{DB}^\text{ц}$, $\vec{a}_B^\tau$ и $\vec{a}_B^n$ в левой части (2.30) также построим от точки O_1 до точки O_3. Точка O_4 пересечения направлений $\vec{a}_\text{от}$, направленного вдоль $\vec{a}_\text{п}$, и $\vec{a}_{DB}^\text{вр}$, перпендикулярного DB, определяет абсолютное ускорение $\vec{a}$ и искомое $\vec{a}_\text{от}$. Измеряя длину вектора $\overrightarrow{O_2O_4}$ на чертеже, приближенно получим $a_\text{от} = 464$ см/с^2. Заметим, что графическое решение весьма чувствительно к точности построения. Например, небольшая ошибка в направлении вектора $\vec{a}_{DB}^\text{ц}$ или $\vec{a}_\text{К}$ приводит к существенному изменению ответа.

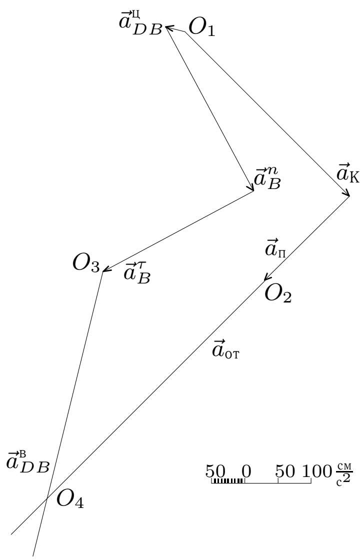


Рис. 130. *Определение* $a_\text{от}$

3. Аналитическое решение

Для аналитического решения необходимо выбрать систему координат и определить координаты всех шарниров. Поместим начало координат в точку C (рис. 124). Таким образом, $x_C = 0$, $y_C = 0$, $x_O = 62$ см, $y_O = 0$, $x_A = 62 + 40\cos 45^\circ = 90{,}28$ см, $y_A = 40\sin 45^\circ = 28{,}28$ см. Точку B найдем на пересечении окружности радиусом AB с центром в A и окружности радиусом CB с центром в начале координат:

$$\begin{aligned} &x_B^2 + y_B^2 = BC^2, \\ &(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = AB^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Получаем два решения, одно из них — $x_B = 4{,}96$ см, $y_B = -42{,}71$ см — не соответствует рисунку. Выбираем второе: $x_B = -20{,}30$ см, $y_B = 37{,}91$ см. Этот же алгоритм использован в решении задачи 25. На с. 72 приведена соответствующая Maple–программа. Положение муфты D определяем из решения системы трех уравнений (задача аналитической геометрии — пересечение окружности и прямой)

$$\begin{aligned} &(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = DB^2, \\ &x_D = OC + S\cos\alpha, \ \ y_D = S\sin\alpha. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Система имеет два решения. Берем решение при $y_D > 0$. Таким образом, получаем $S = OD = 20$ см, $x_D = 76{,}14$ см, $y_D = 14{,}14$ см.

1) *Расчет скоростей.*

Уравнения *трех угловых скоростей* (2.9) примет вид

$$\begin{aligned} &(y_A - y_O)\omega_{1z} + (y_B - y_A)\omega_{2z} + (y_C - y_B)\omega_{3z} = 0, \\ &(x_A - x_O)\omega_{1z} + (x_B - x_A)\omega_{2z} + (x_C - x_B)\omega_{3z} = 0, \end{aligned}$$

или, при заданной угловой скорости $\omega_{1z} = 3$ с$^{-1}$,

$$\begin{aligned} &9{,}63\omega_{2z} - 37{,}91\omega_{3z} = -28{,}28\cdot 3, \\ &-110{,}58\omega_{2z} + 20{,}30\omega_{3z} = -28{,}28\cdot 3. \end{aligned}$$

Решаем систему и находим $\omega_{2z} = 1{,}236$ с$^{-1}$, $\omega_{3z} = 2{,}552$ с$^{-1}$.

2) *Определение* $\vec{v}_{\text{от}}$.

Предположим, что вектор относительной скорости $\vec{v}_{\text{от}}$ направлен от точки D к O. Уравнение (2.29) $\vec{v}_B + \vec{v}_{DB} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}$ запишем в координатной форме, в проекциях на оси x и y. Для этого воспользуемся представлением формулы Эйлера для скорости в виде

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_3 \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{3z} \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{v}_{DB} = \vec{\omega}_4 \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{4z} \\ x_D - x_B & y_D - y_B & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{v}_{\text{п}} = \vec{v}_D = \vec{\omega}_1 \times \vec{OD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{1z} \\ x_D - x_O & y_D - y_O & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следуют формулы для проекций

$$\begin{aligned} &v_{Bx} = -\omega_{3z}(y_B - y_C), && v_{By} = \omega_{3z}(x_B - x_C), \\ &v_{DBx} = -\omega_{4z}(y_D - y_B), && v_{DBy} = \omega_{4z}(x_D - x_B), \\ &v_{\text{п}x} = -\omega_{1z}(y_D - y_O), && v_{\text{п}y} = \omega_{1z}(x_D - x_O). \end{aligned} \tag{2.33}$$

В результате получаем систему

$$-\omega_{3z}(y_B - y_C) - \omega_{4z}(y_D - y_B) = -v_{\text{от}}\cos 45^\circ - \omega_{1z}(y_D - y_O),$$

$$\omega_{3z}(x_B - x_C) + \omega_{4z}(x_D - x_B) = -v_{\text{от}} \sin 45^\circ + \omega_{1z}(x_D - x_O).$$

Подставив сюда известные координаты и найденные угловые скорости, запишем систему уравнений для $v_{\text{от}}$ и ω_{4z}:

$$\begin{aligned} 0{,}71 v_{\text{от}} + 23{,}77\omega_{4z} &= 54{,}32, \\ 0{,}71 v_{\text{от}} + 96{,}44\omega_{4z} &= 94{,}23. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Находим решение системы $v_{\text{от}} = 58{,}36$ см/с, $\omega_{4z} = 0{,}549$ с$^{-1}$.

3) *Расчет ускорений четырехзвенника $OABC$.*

При $\varepsilon_{1z} = 0$ запишем уравнения *трех угловых ускорений* (2.10):

$$\varepsilon_{3z}(x_C - x_B) + \varepsilon_{2z}(x_B - x_A) = \\ = \omega_{3z}^2(y_C - y_B) + \omega_{2z}^2(y_B - y_A) + \omega_{1z}^2(y_A - y_O),$$

$$\varepsilon_{3z}(y_C - y_B) + \varepsilon_{2z}(y_B - y_A) = \\ = -\omega_{3z}^2(x_C - x_B) - \omega_{2z}^2(x_B - x_A) - \omega_{1z}^2(x_A - x_O).$$

Координаты всех точек и угловые скорости звеньев уже найдены. При $\omega_{3z} = 2{,}552$ с$^{-1}$, $\omega_{2z} = 1{,}236$ с$^{-1}$, $\omega_{1z} = 3$ с$^{-1}$ получаем

$$20{,}30\varepsilon_{3z} - 110{,}58\varepsilon_{2z} = -2{,}552^2 \cdot 37,91 + 1{,}236^2 \cdot 9{,}63 + 3^2 \cdot 28{,}28 = 22{,}33,$$

$$9{,}63\varepsilon_{2z} - 37{,}91\varepsilon_{3z} = -2{,}552^2 \cdot 20,3 + 1{,}236^2 \cdot 110{,}58 - 3^2 \cdot 28{,}28 = -217{,}89.$$

Решение этой системы: $\varepsilon_{2z} = 0{,}895$ с$^{-2}$, $\varepsilon_{3z} = 5,975$ с$^{-2}$.

4) *Определение $\vec{a}_{\text{от}}$.*

Для того чтобы уравнение (2.30) записать в координатной форме, потребуются проекции векторов ускорений. Имеем

$$\vec{a}_B^n = \vec{\omega}_3 \times \vec{v}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{3z} \\ v_{Bx} & v_{By} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_B^\tau = \vec{\varepsilon}_3 \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3z} \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_{DB}^{\text{ц}} = \vec{\omega}_4 \times \vec{v}_{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{4z} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_{DB}^{\text{вр}} = \vec{\varepsilon}_4 \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{4z} \\ x_D - x_B & y_D - y_B & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_{\text{п}} = \vec{a}_D^n = \vec{\omega}_1 \times \vec{v}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{1z} \\ v_{Dx} & v_{Dy} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_{\text{К}} = 2\vec{\omega}_{\text{п}} \times \vec{v}_{\text{от}} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{1z} \\ v_{\text{от}x} & v_{\text{от}y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определители по элементам верхней строки (орты $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей x и y), с учетом уже найденных проекций скоростей (2.33) получим выражения

$$\begin{aligned} &a^n_{Bx} = -\omega^2_{3z}(x_B - x_C), \quad a^\tau_{Bx} = -\varepsilon_{3z}(y_B - y_C),\\ &a^{\text{ц}}_{DBx} = -\omega^2_{4z}(x_D - x_B), \quad a^{\text{вр}}_{DBx} = -\varepsilon_{4z}(y_D - y_O),\\ &a_{\text{п}x} = -\omega^2_1(x_D - x_O), \quad a_{\text{К}x} = -2\omega_{1z}v_{\text{от}y} = 2\omega_{1z}v_{\text{от}}\sin 45^\circ. \end{aligned}$$

Аналогично получаются проекции на ось y. В итоге

$$\begin{aligned} &-\omega^2_{3z}(x_B - x_C) - \varepsilon_{3z}(y_B - y_C) - \omega^2_{4z}(x_D - x_B) - \varepsilon_{4z}(y_D - y_B) =\\ &= -a_{\text{от}}\cos 45^\circ - \omega^2_1(x_D - x_O) + 2\cdot\omega_{1z}v_{\text{от}}\sin 45^\circ,\\ &-\omega^2_{3z}(y_B - y_C) + \varepsilon_{3z}(x_B - x_C) - \omega^2_{4z}(y_D - y_B) + \varepsilon_{4z}(x_D - x_B) =\\ &= -a_{\text{от}}\sin 45^\circ - \omega^2_1(y_D - y_O) - 2\cdot\omega_{1z}v_{\text{от}}\cos 45^\circ. \end{aligned}$$

Подставив сюда все известные величины, получим систему уравнений для $a_{\text{от}}$ и ε_{4z}:

$$\begin{aligned} 0{,}71a_{\text{от}} + 23{,}77\varepsilon_{4z} &= 243{,}7,\\ 0{,}71a_{\text{от}} + 96{,}44\varepsilon_{4z} &= -13{,}87. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Решение системы[1] дает искомое относительное ускорение $a_{\text{от}} = 463{,}77$ см/с^2 и угловое ускорение стержня $\varepsilon_{4z} = -3{,}544$ с$^{-2}$.

Maple–программа для решения этой задачи координатным методом дана на с. 380.

[1] В процессе аналитического решения приходится 4 раза решать систему двух линейных уравнений. Эту математическую процедуру лучше выполнить в системе **Maple**, тем более что матрицы систем (2.34) и (2.35) совпадают.