Глава 1

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

1.1 ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

1.1.1 Упругость. Сплошная среда

Опыт показывает, что твердое тело под влиянием внешних воздействий изменяет свою форму. К внешним воздействиям относятся поверхностные нагрузки, массовые силы, нагревание или охлаждение тела. Если деформация тела не превышает некоторых пределов, то при достаточно медленном снятии внешних воздействий оно возвращается к своему первоначальному состоянию. Если снять внешние воздействия мгновенно, то тело совершает свободные колебания. Однако вследствие внешнего и внутреннего сопротивления тело по истечении некоторого времени возвращается в состояние равновесия, принимая свою первоначальную форму.

Такое свойство твердого тела называется упругостью.

При значительных деформациях снятие внешних воздействий не приводит к полному исчезновению деформации. Сохраняется некоторая остаточная деформация тела. Эти остаточные деформации называются пластическими.

Математическая теория упругости старается выяснить изменения геометрического и механического состояния тела в процессе его деформации. Речь идет об определении и оценке геометрических величин, характеризующих деформации тела, а также об оценке внутренних сил, называемых напряжениями, которые возникают в процессе деформации.

Для анализа деформированного и напряженного состояний применяются методы математической физики. Для этого определяется понятие сплошной среды, ее плотности, рассматриваются геометрические величины, описывающие изменения тела, внутренние силы, их связь с внешними воздействиями. Соотношения между внутренними силами и деформациями берутся из эксперимента. Поэтому теория упругости является феноменологической теорией.

В теории упругости пользуются теоретической, идеализированной и упрощенной, моделью твердого тела в виде "материального континуума" или "материальной сплошной среды". Пренебрегая молекулярной структурой тела, а стало быть, опуская ряд реальных свойств твердого тела, мы принимаем модель непрерывного размещения материи в пространстве. "Размазывая" атомную и молекулярную структуру тела, мы рассматриваем его как трехмерное евклидово пространство, точки которого совпадают с частицами тела.

Материальный континуум трактуется как непрерывная среда в математическом смысле. Поэтому предполагается, что близкие точки переходят после деформации также в близкие точки. Возможность появления во время деформации трещин и пустот в теле исключается.

Непрерывное распределение материи в некоторой области тела можно охарактеризовать с помощью одной скалярной величины, а именно плотности. Эту величину мы определим следующим образом. Рассмотрим точку P, окруженную замкнутой поверхностью, охватывающей область с объемом ΔV. Содержащуюся в этой области массу обозначим через ΔM. В силу предположения о непрерывности среды, определим плотность ρ в точке P как предел отношения $\Delta M/\Delta V$ при стремлении к нулю объема ΔV:

$$\rho(P) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M(P)}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \tag{1}$$

Этот предел определяет ρ как функцию непрерывную и дифференцируемую в области, занятой телом.

Полная масса тела определяется формулой

$$M = \int_V \rho dV \tag{2}$$

Если плотность постоянна в каждой точке тела, то $M = \rho V$. Твердое тело, характеризующееся постоянной плотностью, называется однородным телом.

В настоящей монографии мы будем заниматься исключительно упругими телами. Под этим мы будем понимать такое идеализированное твердое тело, которое после снятия внешних воздействий возвращается к своему первоначальному положению и форме. При этом мы предполагаем, что существует только одно состояние, характеризующееся отсутствием внутренних сил и деформаций, к которому возвращается тело после снятия внешних воздействий. Это состояние называется естественным состоянием тела.

Главным предметом нашего изучения будет линейная теория упругости. В этой теории предполагается, что деформации тела являются достаточно малыми, а феноменологические соотношения, связывающие деформированное и напряженное состояния тела, являются линейными.

1.1.2 Деформация тела. Вектор перемещения

Рассмотрим упругое тело, которое в некоторый момент времени $t = t_0$ занимало в евклидовом пространстве область B и находилось в естественном состоянии.

Положение каждой точки этой области определяет радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3. Вследствие приложенных к телу внешних воздействий (нагрузка, нагревание и т. п.) оно в

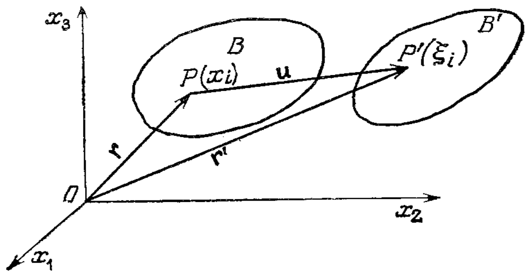

Рис.1.1.

некоторый момент времени t займет в евклидовом пространстве область B'. Точка P области B переместится в точку P' области B'. Положение точки P' описывается в той же самой системе координат x_1, x_2, x_3 радиусом-вектором $\vec{r'}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Во время перемещения материальных точек тело, вообще говоря, изменяет свою форму и объем (рис. 1.1). Соответствие между положением $P(x_1, x_2, x_3)$ материальной точки в момент $t = t_0$ и положением $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ той же материальной точки в момент t должно быть взаимно однозначным и гомеоморфным. Это вытекает из предположения о непрерывности материальной среды. Соответствие между точками P и P' описывается соотношениями

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Предположим, что функции ξ_i принадлежат классу C^1 (т. е. непрерывны и имеют непрерывные первые производные) и что преобразование (1) является неособенным. Тогда якобиан

$$D = \det \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \tag{2}$$

должен быть отличным от нуля, что позволяет получить соотношения, обратные к (1):

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Из соотношений (1) —(3) можно извлечь несколько следствий. Материальные точки, лежавшие до деформации на кривой или поверхности, переходят после деформации в точки, лежащие на некоторой кривой или поверхности. Материальные точки, лежавшие до деформации внутри замкнутой поверхности, после деформации также лежат внутри некоторой замкнутой поверхности. Материальные элементы, составлявшие до деформации границу тела, образуют ее и после деформации. Из рис. 1.1 видно, что

$$\vec{PP'} = \vec{r'} - \vec{r} = \vec{u}. \tag{4}$$

Вектор $\vec{u}$ назовем перемещением точки P, вызванным деформацией тела. Соотношение (4) можно записать также в виде

$$u_i = \xi_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Отсюда

$$\xi_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Формула (6) выражает зависимость (в каждый момент t) между параметрами x_1, x_2, x_3 и ξ_1, ξ_2, ξ_3. Каждой точке до деформации соответствует только одна точка после деформации.

Формулы (6) можно также рассматривать как преобразование координат. Параметры x_i введенные как декартовы координаты до деформации, можно использовать как криволинейные координаты для описания положения точек после деформации.

Предположим, что $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ имеют постоянные значения. В этом случае система уравнений (6) будет определять кривую, на которой лежат точки P', до деформации лежавшие на прямой, параллельной оси x_3. Вообще мы утверждаем, что координатные линии x_1, x_2, x_3 в деформированной среде являются линиями, на которых находятся точки, лежавшие до деформации на прямых, параллельных осям декартовой системы координат.

Представленное здесь описание поля перемещений связано с именем Лагранжа. Для описания деформации тела мы будем пользоваться координатами x_i материальной частицы (точки) тела (в момент $t = t_0$) как независимыми переменными.

Поле перемещений $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ в момент t выражаем через положение x_1, x_2, x_3, занимаемое частицей в момент $t = t_0$. Наряду с описанием Лагранжа применяется другой способ, в котором в качестве независимых переменных принимаются координаты ξ_i, относящиеся к положению материальной точки в момент t. Это описание, связанное с именем Эйлера, имеет вид

$$x_i = \xi_i - u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i = l, 2, 3. \tag{7}$$

Если в эти соотношения мы подставим $\xi_1 = \xi_1^0$, $\xi_2 = \xi_2^0$, то получим из системы (7) систему трех уравнений, описывающую кривую, на которой до деформации лежали точки P, оказавшиеся после деформации на прямой, параллельной оси x_3. Рассмотрим для примера двумерное движение

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \operatorname{ch} t + x_2 \operatorname{sh} t, \\ \xi_2 &= x_1 \operatorname{sh} t + x_2 \operatorname{ch} t. \end{aligned} \tag{8}$$

Перемещение u_α, $(\alpha = 1, 2)$ можно выразить либо в координатах x_α, либо в координатах ξ_α. Подставляя выражения (8) в уравнения

$$u_\alpha = \xi_\alpha - x_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{9}$$

получим вектор перемещения в координатах Лагранжа

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1(\operatorname{ch} t - 1) + x_2 \operatorname{sh} t, \\ u_2 &= x_1 \operatorname{sh} t + x_2(\operatorname{ch} t - 1). \end{aligned} \tag{10}$$

Если разрешить уравнения (8) относительно $x_{1,\,2}$ и подставить в (9), получим тот же самый вектор перемещения в координатах Эйлера

$$\begin{aligned} u_1 &= -\xi_1(\operatorname{ch} t - 1) + \xi_2 \operatorname{sh} t, \\ u_2 &= \xi_1 \operatorname{sh} t - \xi_2(\operatorname{ch} t - 1). \end{aligned} \tag{11}$$

1.1.3 Тензор деформаций

Рассмотрим две бесконечно близкие точки недеформированного тела: точку P с декартовыми координатами x_i и точку Q с координатами $x_i + dx_i$. В результате деформации точка P перейдет в положение P' с координатами $x_i + u_i = \xi_i$, а точка Q переместится в точку Q' с координатами $x_i + dx_i + u_i + du_i$. Здесь u — вектор перемещения, т. е. вектор с началом в точке P и концом в точке P'.

Квадрат расстояния между точками P и Q равен

$$|\vec{PQ}|^2 = ds_0^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i dx_i \tag{1}$$

Квадрат расстояния между этими точками после деформации выражается формулой

$$|\vec{P'Q'}|^2 = ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 = d\xi_i d\xi_i \tag{2}$$

Примем описание деформации тела по Лагранжу, вводя в качестве независимых переменных координаты x_i материальной точки до деформации. Так как

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad t = const,$$

то[1]

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j \tag{3}$$

Отсюда, согласно формуле (2), имеем

$$ds^2 = d\xi_i d\xi_j = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_j dx_k \tag{4}$$

Образуя разность квадратов расстояний, находим, что

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk}\right) dx_j dx_k = 2e_{jk} dx_j dx_k \tag{5}$$

Величины

$$2e_{jk} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \tag{6}$$

описывают деформацию тела в первоначальных координатах. Здесь δ_{jk} — символ Кронекера, определенный следующим образом:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

[1] Здесь мы используем соглашение о суммировании. Формула (3) означает, что

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} dx_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя соотношение

$$u_i = \xi_i - x_i$$

и подставляя в (5)

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij},$$

выразим величины e_{jk} через производные вектора перемещения:

$$e_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{7}$$