ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

5 октября 2011г.

Задача 1 (8)

Кривошипно-кулисный механизм расположен в горизонтальной плоскости. К кривошипу и кулисе приложены вращающие моменты $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$. Для положения указанного на рисунке 1 найти отношение $\boldsymbol{M_1}$ к $\boldsymbol{M_2}$ при равновесии механизма.

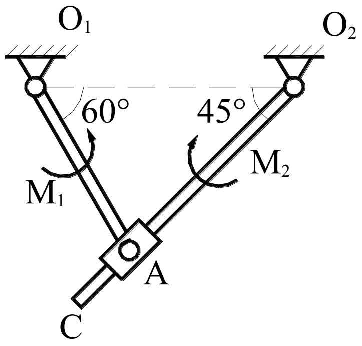


Рис.1

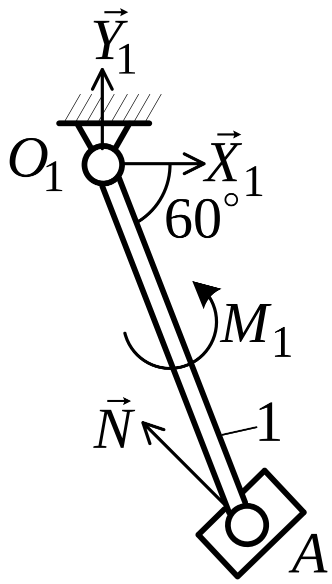
Решение

1 –й способ.

Расчленяем систему на две части и расставляем силы (рис.2, рис.3). Составляем уравнения моментов относительно точек $\boldsymbol{O_1}$ и $\boldsymbol{O_2}$

$$\sum M_{O_2} = M_2 - N \cdot O_2A = 0,$$

$$\sum M_{O_1} = M_1 - N \cdot O_1A \cdot \sin 15^o = 0.$$



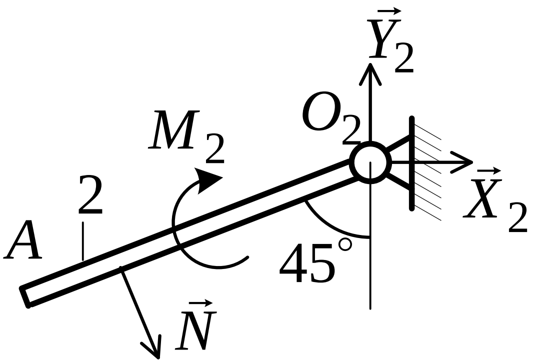


Рис.2 Рис.3

Откуда

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{O_1A\sin 15^o}{O_2A} = \frac{\sin 45^o \cdot \sin 15^o}{\sin 60^o} = \frac{\cos 30^o - \cos 60^o}{2\sin 60^o} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}.$$

2-й способ (по принципу возможных перемещений, рис.4)

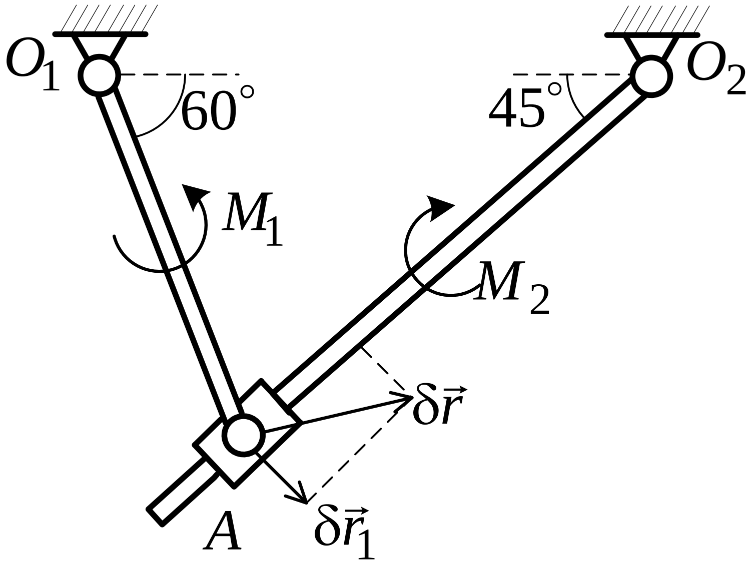


Рис.4

$$\delta A = M_1 \frac{\delta r}{O_1 A} - M_2 \frac{\delta r \cdot \sin 15^o}{O_2 A} = 0.$$

Откуда

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{O_1 A \sin 15^o}{O_2 A} = \frac{\sin 45^o \cdot \sin 15^o}{\sin 60^o} = \frac{\cos 30^o - \cos 60^o}{2\sin 60^o} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}.$$

Задача 2 (9)

Ломанный прямоугольный стержень ABCD, состоящий из трёх однородных стержней AB=CD=2BC=***2l,*** имеет свободную опору в точке O. При каких значениях коэффициента трения в точке O равновесие возможно при любом расположении опоры между точками B и C (рис.5).

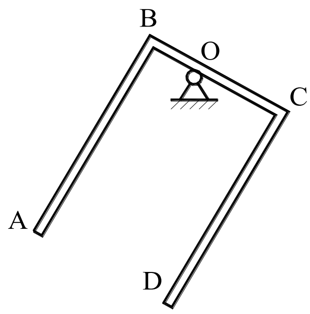


Рис.5

Решение

Находим сумму моментов сил относительно точки O (***x***- расстояние от точки O до середины стержня BC)

$$\sum M_o = 2P\left[l\sin\alpha + \left(\frac{l}{2} - x\right)\cos\alpha\right] - Px\cos\alpha - 2P\left[\left(\frac{l}{2} + x\right)\cos\alpha - l\sin\alpha\right] = 0.$$

Из этого уравнения

$$2l\tan\alpha + l - 2x - x - l - 2x + 2l\tan\alpha = 0,$$

Или $$x = \frac{4}{5} l \tan\alpha \le \frac{l}{2}$$

Поскольку (рис.6)

$F_{тр} = R \cdot \sin\alpha; \;\; N = R \cdot \cos\alpha$

$R \cdot \sin\alpha \le fP\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha \le f$

Тогда получим

$\tan\alpha \le \dfrac{5}{8}$

$f \ge \dfrac{5}{8}$

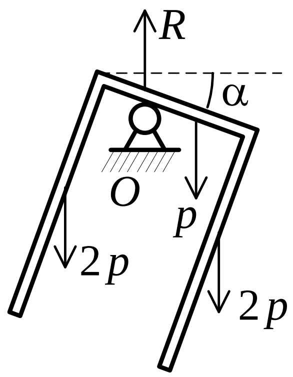


Рис.6

Задача 3 (11)

Однородная балка OA прикреплена к полу сферическим шарниром, а точкой B опирается на горизонтальную шероховатую балку, жёстко заделанную в стену. Коэффициент трения между балками равен $\boldsymbol{f}$. В положении, когда балки перпендикулярны, угол между балкой OA и полом равен $\boldsymbol{\beta}$. Определить при каких углах наклона балки OA к горизонту возможно равновесие (рис 7).

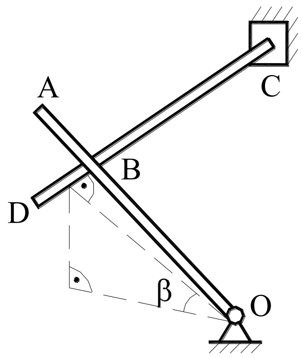


рис.7

Решение

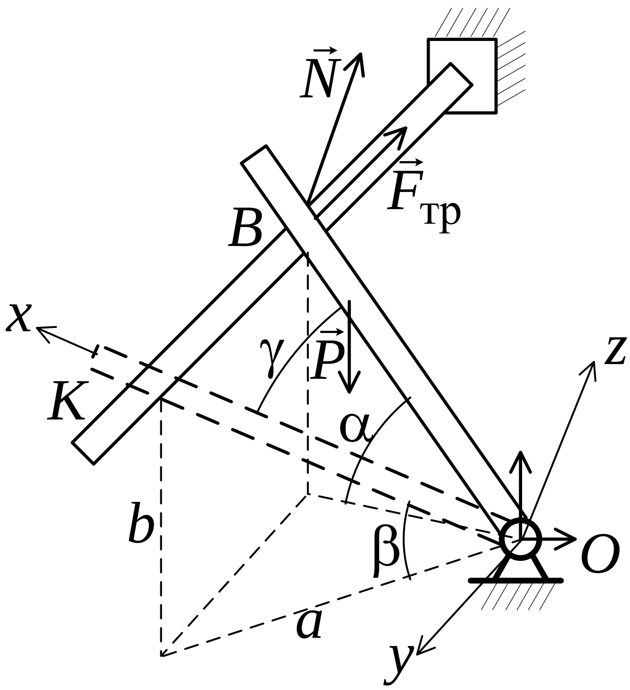


Рис.8

Имеем (рис.8)

$\tan\beta = \dfrac{b}{a} \qquad OB = \dfrac{b}{\sin\alpha}$

$\cos\gamma = \dfrac{OK}{OB} = \dfrac{\sin\alpha \cdot b}{b \cdot \sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

Составляем уравнения моментов относительно осей ***x,z.***

$$\sum M_{kx} = P\cos\beta l\sin\gamma - N\,OB\,\sin\gamma = 0$$

$$\sum M_{kz} = F_{mp}\cdot OB\cos\gamma - Pl\sin\beta\sin\gamma = 0$$

Откуда

$$N = \frac{Pl\sin\alpha\cos\beta}{b}, \quad F_{\text{тр}} = \frac{P\sin\beta l\sin\gamma\sin\alpha}{b\cos\gamma}$$

Из условия равновесия

$$\frac{P\sin\beta l\sin\gamma\sin\alpha}{b\cos\gamma} \le f\frac{Pl\sin\alpha\cos\beta}{b}$$

$$\tan\beta \le f\cot\gamma$$

$$\tan\beta \le f\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}}}$$

$$\tan\beta \le f\frac{f\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha \ge \frac{\tan\beta\sin\beta}{\sqrt{f^2+\tan^2\beta}}$$

Задача 4 (7)

Стержни AC и BC, соединённые шарниром C, совершают движение в плоскости, в которой они расположены. В некоторый момент, когда угол между ними был равен 90^0, мгновенные центры ускорений стержней AC и BC находились соответственно в точках B и A, а их угловые скорости были равны $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$. В указанный момент определить величину и направление ускорения точки C, если AC=BC=***l*** (рис.9).

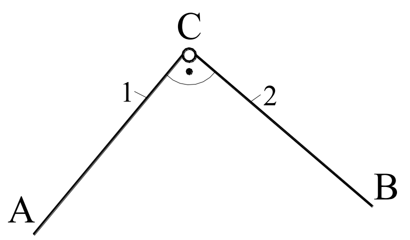


рис.9

Решение

Ускорение точки C (рис.10)

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{\text{ц}}_{CB} + \vec{a}^{\text{вр}}_{CB} = \vec{a}^{\text{ц}}_{CA} + \vec{a}^{\text{вр}}_{CA}$$

Где $a^{\text{вр}}_{CB} = \varepsilon_1 l \qquad a^{\text{ц}}_{CB} = \omega_1^2 l \qquad a^{\text{вр}}_{CA} = \varepsilon_2 l \qquad a^{\text{ц}}_{CA} = \omega_2^2 l$

Проецируем на AC: $a^{\text{вр}}_{CB} = a^{\text{ц}}_{CA} = \omega_2^2\cdot l$.

Получаем

$$a^{\text{вр}}_{CB} = a^{\text{ц}}_{CA} = \omega_2^2\cdot l$$

$$a_C = \sqrt{\left(a^{\text{ц}}_{CB}\right)^2 + \left(a^{\text{вр}}_{CB}\right)^2} = l\sqrt{\omega_1^4+\omega_2^4}, \quad \tan\varphi = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$$

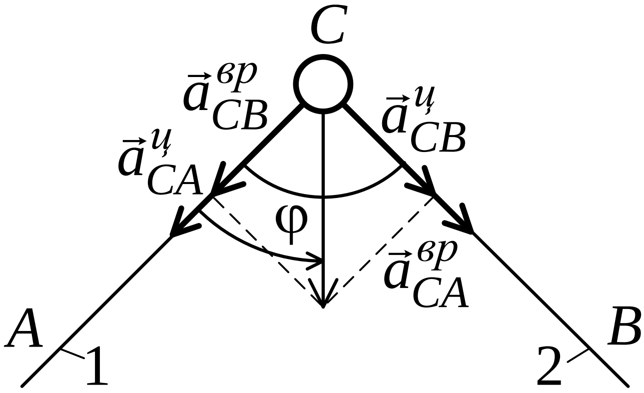


Рис.10

Задача 5 (9)

Окружность радиуса ***r*** вращается в своей плоскости вокруг оси шарнира О с постоянной угловой скоростью ***ω*** .Точка М движется по окружности равномерно с относительной линейной скоростью $\boldsymbol{v_r=\omega r}$. Направление движения точки и вращения окружности показаны на рисунке 11. Определить величину и направление абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки М.

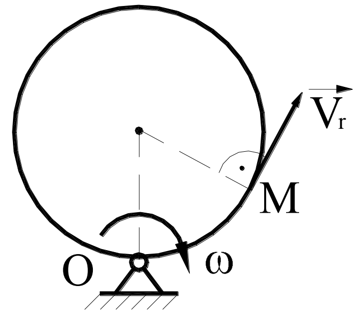


Рис.11

Решение

Выражаем относительную и переносную скорости, относительное, переносное и кориолисово ускорения (рис.12)

$$V_e = \omega \cdot 2r\sin\frac{\varphi}{2};\; V_r = \omega r;$$

$$a_e = \omega^2 \cdot 2r\sin\frac{\varphi}{2};\; a_r = \omega^2 r;\; a_{cor} = 2\omega^2 r\,.$$

Находим проекции абсолютной скорости на оси X, Y:

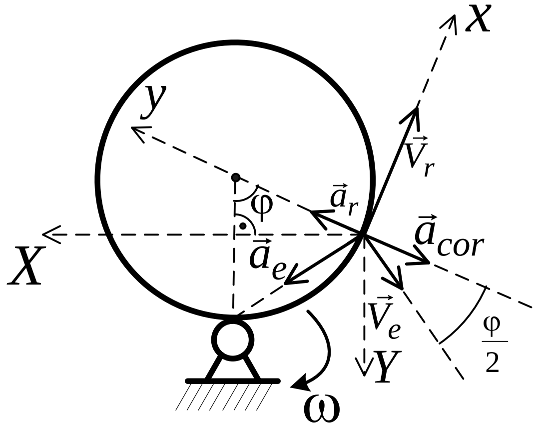


Рис.12

Откуда

$$\begin{cases} V_{aX} = -V_r \cos\varphi + V_e \sin\dfrac{\varphi}{2} = -\omega r\cos\varphi - 2\omega r\sin^2\varphi = -\omega r, \\ V_{aY} = -V_r \sin\varphi + V_e \cos\dfrac{\varphi}{2} = -\omega r\sin\varphi + 2\omega r\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} = 0. \end{cases} \qquad \boxed{V_a = \omega r}$$

$$\begin{cases} a_X = (a_r - a_{cor})\sin\varphi + a_e\cos\dfrac{\varphi}{2} = -\omega^2 r\sin\varphi + \omega^2 r\sin\varphi = 0, \\ a_Y = (a_{cor} - a_r)\cos\varphi + a_e\sin\dfrac{\varphi}{2} = \omega^2 r\cos\varphi + 2\omega^2 r\sin^2\varphi = \omega^2 r. \end{cases}$$

Задача 6 (7)

Для редуктора, изображённого на рисунке 13, найти отношение угловых скоростей валов I и II, если радиусы колёс r_1=30см, r_2=30см, $r_{2'}$=7см, r_3=8см, $r_{3'}$=20см, r_4=15см, $r_{4'}$=20см , r_5=15см.

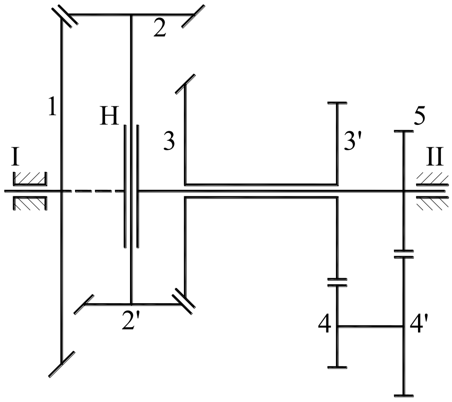


Рис.13

Решение

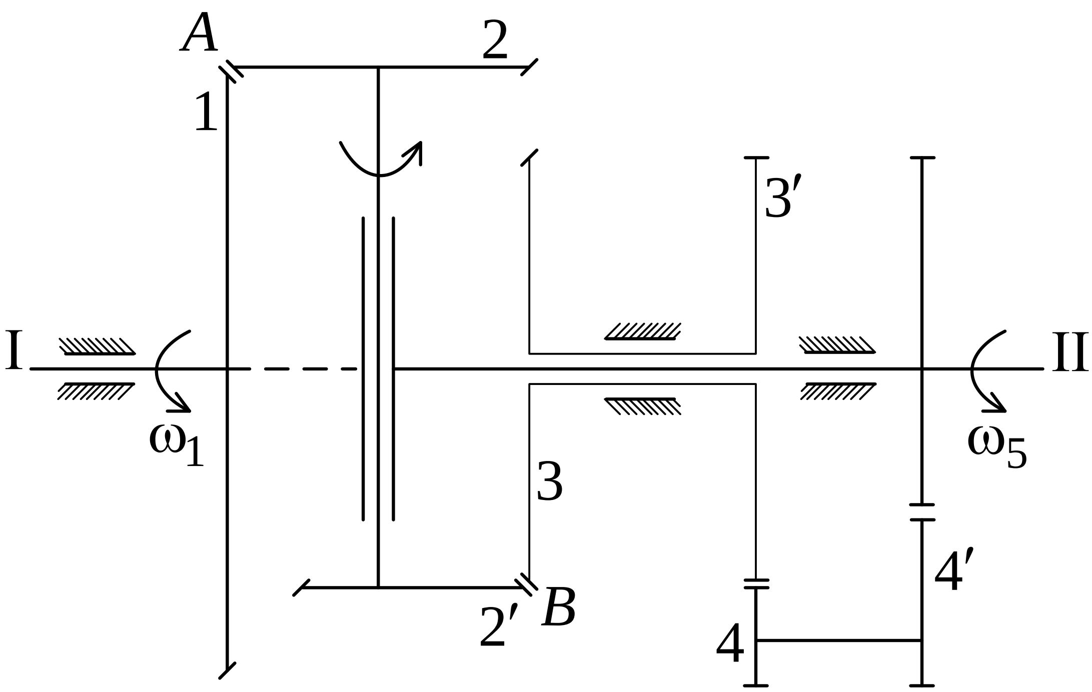


Рис.14

Решение

I метод (метод Виллиса):

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3'};\ \frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{r_5}{r_4'} \Rightarrow \frac{\omega_3}{\omega_5} = \frac{r_4 r_5}{r_3' r_4'};$$

Приняв в качестве водила вал II, получим

$$\frac{\omega_1-\omega_5}{\omega_{2r}}\cdot\frac{\omega_{2r}}{\omega_3-\omega_5}=\frac{r_2}{r_1}\frac{r_3}{r_2'}.$$ Откуда

$$\omega_{\mathrm{I}}-\omega_{\mathrm{II}}=\omega_{\mathrm{II}}\frac{r_2r_3}{r_1r_2'}\left(\frac{r_5r_4}{r_3'r_4'}-1\right);$$

$$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{II}}}=1+\frac{r_2r_3}{r_1r_2'}\left(\frac{r_4r_5}{r_3'r_4'}-1\right)=1+\frac{30\cdot 8}{30\cdot 7}\left(\frac{15\cdot 15}{20\cdot 20}-1\right)=\frac{1}{2}.$$

<u>II метод (метод сложного движения точки):</u>

Для скоростей точек A и B (рис.14)

$$\begin{cases}\vec V_A=\vec V_A^r+\vec V_A^e, & \omega_1r_1=\omega_{2r}r_2+\omega_5r_1, \quad \Big|\cdot r_2' \\ \vec V_B=\vec V_B^r\vec V_B^e. & -\omega_3r_3=-\omega_{2r}r_2'-\omega_5r_3\Big|\cdot r_2\end{cases}\Rightarrow \omega_1r_1r_2'-\omega_3r_3r_2=\omega_5\left(r_1r_2'-r_3r_2\right)$$

$$\omega_{\mathrm{I}}r_1r_2'=\omega_{\mathrm{II}}\frac{r_4r_5}{r_3'r_4'}r_3r_2+\omega_{\mathrm{II}}\left(r_1r_2'-r_3r_2\right),$$

$$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{II}}}=1+\frac{r_3r_2}{r_1r_2'}\cdot\left(\frac{r_4r_5}{r_3'r_4'}-1\right)$$

Задача 7 (10)

Трубка в форме полуокружности радиуса ***R*** вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. В трубке с помощью нити закреплён в точке A под углом OCA=120^0 шарик массы ***m*** . В некоторый момент времени нить обрывается, и шарик вылетает из трубки с относительной линейной скоростью ***u***. Определить силу натяжения, при которой происходит разрыв нити (рис.15).

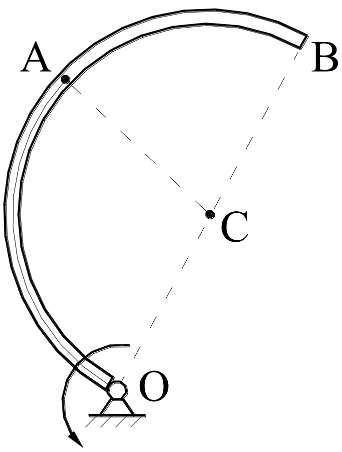


Рис.15

Решение

Спроектируем уравнение динамики относительного движения на касательную(рис.16):

$$\tau:\ m\frac{dV_r}{dt}=\Phi_e\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right);\ \text{где}\ \Phi_e=m\omega^2 2R\sin\frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{dV_r}{dt}=\omega^2 2R\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=\omega^2R\sin\varphi\ \Big|\ d\varphi\cdot R;$$

$$\int_0^U V_r dV_r=\omega^2R^2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow \frac{U^2}{2}=-\omega^2R^2\cos\varphi\Big|_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \Rightarrow \omega R=U.$$

В положении равновесия рассмотрим проекцию на касательную (рис.17)

$\tau: -T + \Phi_e \sin 30^\circ = 0$; $T = m\omega^2 2R \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2 R$.

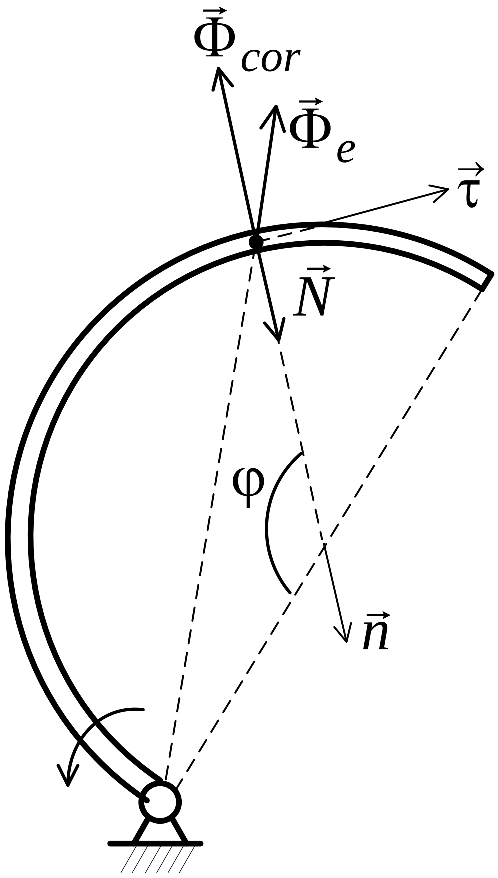


Рис.16

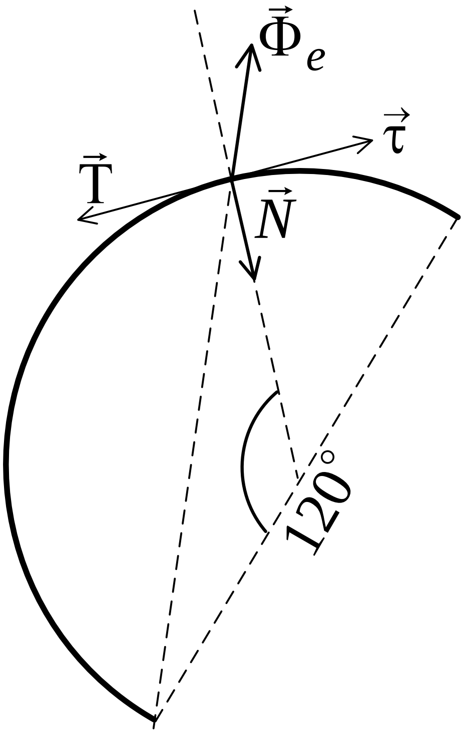
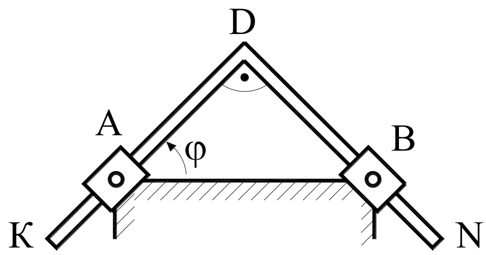


Рис.17

Задача 8 (13)

Два тонких однородных стержня KD и ND длиной **2*l*** жёстко соединены в точке D движутся в вертикальной плоскости под действием силы тяжести так, что всё время проходят через муфты, качающиеся около неподвижных точек A и B соответственно (рис.18). В неустойчивом положении равновесия при ***φ=π/4*** уголок получил ничтожно малую угловую скорость. Пренебрегая силами трения, найти угловую скорость как функцию угла ***φ***. AB=$l\sqrt{2}$.



Решение

Рис.18

По закону сохранения энергии $T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$

Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} J_p \dot{\varphi}^2$, где J_p — момент инерции тела относительно мгновенного центра скоростей P (рис19).

$$J_p = \frac{1}{12} m4l^2 + m\left[\left(l\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(l\sqrt{2}\sin\varphi - l\right)^2\right] + \frac{1}{12} m4l^2 + m\left[\left(l\sqrt{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(l\sqrt{2}\cos\varphi - l\right)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{3}ml^2 + m\left(2l^2 + l^2 - 2l^2\sqrt{2}\sin\varphi + 2l^2 + l^2 - 2l^2\sqrt{2}\cos\varphi\right) = \frac{20}{3}ml^2 - 2ml^2\sqrt{2}\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{ml^2}{3}\left[20 - 6\sqrt{2}\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right)\right];$$

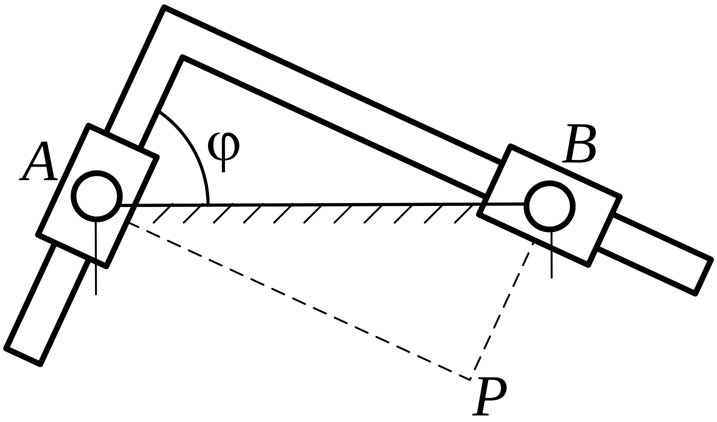


Рис.19

Потенциальная энергия

$$П = mg\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - l\right)\cos\varphi + mg\left(l\sqrt{2}\cos\varphi - l\right)\sin\varphi = mgl\sqrt{2}\sin 2\varphi - mgl\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right);$$

$$П_0 = П\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{2ml^2}{3}\left[10 - 3\sqrt{2}\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right)\right]\dot{\varphi}^2 = mgl\left[\sqrt{2}\sin 2\varphi - \left(\sin\varphi + \cos\varphi\right)\right];$$

$$\boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{2l}\,\frac{\sqrt{2}\sin 2\varphi - \left(\sin\varphi + \cos\varphi\right)}{10 - 3\sqrt{2}\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right)}}.$$

Задача 9 (13)

К краю А однородного полуцилиндра весом ***P*** и радиусом ***R*** прикреплён груз весом ***Q*** . Определить период малых колебаний данной механической системы около положения равновесия, предполагая, что скольжение отсутствует (рис.20). Принять ***P=3πQ/4.***

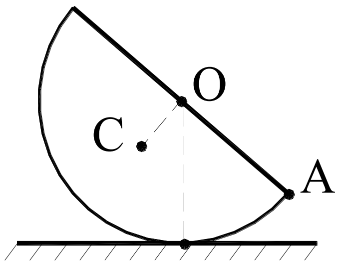


Рис.20

Решение

Уравнения Лагранжа второго рода $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi}$

Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}J_k\dot{\varphi}^2$, где J_k - момент инерции тела относительно МЦС К (рис.21). Момент инерции

$$\begin{cases} J_k^ч = J_c + \left(CK\right)^2\dfrac{P}{g} \\ J_o^ч = J_c + \left(CO\right)^2\dfrac{P}{g} \end{cases}$$

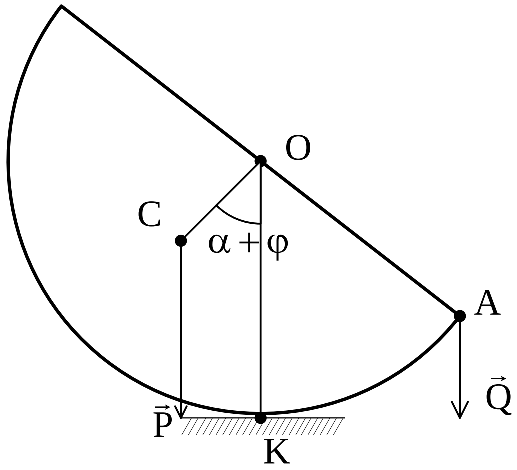


Рис.21

Откуда

$$J_k^{ц} = J_o^{ц} + \frac{P}{g}\left(CK^2 - CO^2\right) = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2 + \frac{P}{g}\left(R^2 - 2RCO\cos(\alpha+\varphi)\right)$$

$$J_k^{гр} = \frac{Q}{g}\left(KA\right)^2 = \frac{Q}{g}\left(2R\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}\right)^2 = \frac{2QR^2}{g}\left(1-\cos(\alpha+\varphi)\right)$$

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left[\frac{3}{2}\frac{P}{g}R^2 + \frac{2QR^2}{g} - \left(\frac{2PR\cdot CO}{g} + \frac{2QR^2}{g}\right)\cdot\cos(\alpha+\varphi)\right] =$$

$$= \frac{\dot{\varphi}^2 R^2}{2g}\left(\frac{3}{2}P + 2Q - \left(\frac{8P}{3\pi} + 2Q\right)\cdot\cos(\alpha+\varphi)\right) \cong a\dot{\varphi}^2, \text{ где}$$

$$a = \frac{R^2}{2g}\left(\frac{3}{2}P + 2Q - \left(\frac{8P}{3\pi} + 2Q\right)\cdot\cos\alpha\right)$$

Потенциальная энергия

$$\varPi = P\left(R - OC\cos(\alpha+\varphi)\right) - QR\sin(\alpha+\varphi)$$

$$\frac{\partial \varPi}{\partial\varphi} = P\cdot OC\cdot\sin(\alpha+\varphi) - QR\cos(\alpha+\varphi)$$

$$\left.\frac{\partial \varPi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \Rightarrow P\cdot OC\cdot\sin\alpha = QR\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{3\pi Q}{4P}$$

$$\frac{\partial \varPi}{\partial\varphi} \cong P\frac{4R}{3\pi}\sin\alpha + P\frac{4R}{3\pi}\cos\alpha\cdot\varphi - QR\cos\alpha + QR\sin\alpha\cdot\varphi = \left(P\frac{4R}{3\pi}\cos\alpha + QR\sin\alpha\right)\varphi = b\varphi$$

где **b**$=\left(P\frac{4R}{3\pi}\cos\alpha + QR\sin\alpha\right)$

$$a\ddot{\varphi} = -b\varphi$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}$$

При $P = \dfrac{3\pi Q}{4}$, $\alpha = 45^o$, $b = QR\sqrt{2}$, $a = 1{,}356\dfrac{R^2 Q}{g}$, $\tau \cong 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

Задача 10 (13)

Тонкий однородный стержень, скользя поступательно по гладкой горизонтальной плоскости, ударяется о стену под углом $\boldsymbol{\alpha}$. При каком коэффициенте восстановления второй удар произойдёт всей длиной стержня. При каких условиях на угол $\boldsymbol{\alpha}$ это возможно (рис.22).

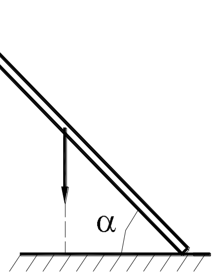


Рис.22

Решение

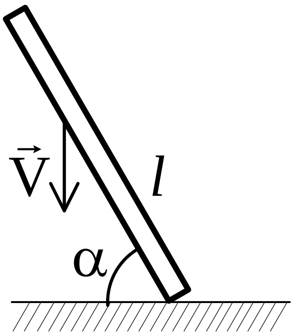


Рис.23

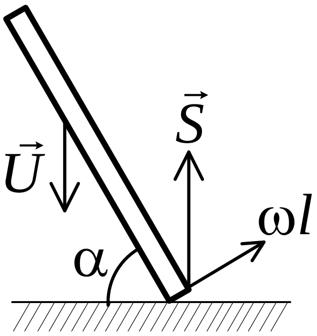


Рис.24

Записываем теорему об изменении количества движения, терему об изменении МКД, формулу для коэффициента восстановления, условие касания стержня со стенкой всей длиной (рис.23, рис.24):

$$\begin{cases} mU - mv = -S \\ \frac{1}{3}ml^2\omega = Sl\cos\alpha \\ k = \dfrac{\omega\, l\cos\alpha - U}{v} \\ t = \dfrac{\alpha}{\omega} = \dfrac{l\sin\alpha}{U} \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \omega\, l = 3\cos\alpha\,(v - U) \\ kv = \omega\, l\cos\alpha - U \\ U = \dfrac{\omega\, l\sin\alpha}{\alpha} \end{cases}$$

$$k\omega l = -3k\cos\alpha U + 3\omega l\cos^2\alpha - 3U\cos\alpha$$

$$k = -\frac{3k\cos\alpha\sin\alpha}{\alpha} + 3\cos^2\alpha - \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}$$

$$k\,(\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha) = 3\alpha\cos^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha$$

$$k=\frac{3(\alpha-\tan\alpha)}{\alpha(1+\tan^2\alpha)+3\tan\alpha}$$

Найдём условие на угол $\boldsymbol{\alpha}$

$$0\le k\le 1\Rightarrow\begin{cases}\alpha\ge\tan\alpha\\ \dfrac{3(\alpha-\tan\alpha)}{\alpha(1+\tan^2\alpha)+3\tan\alpha}\le 1\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\alpha\ge\tan\alpha\\ 3\alpha-3\tan\alpha\le\alpha+\alpha\tan^2\alpha+3\tan\alpha\end{cases}$$

$$\tan^2\alpha+\frac{6}{\alpha}\tan\alpha-3\ge 0$$

$$\tan\alpha=-\frac{3}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{9}{\alpha^2}+3}$$

Окончательно

$$-\frac{3}{\alpha}+\sqrt{\frac{9}{\alpha^2}+3}\le\tan\alpha\le\alpha$$