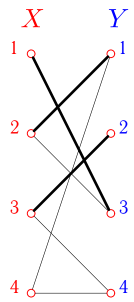

Рис. 4.29

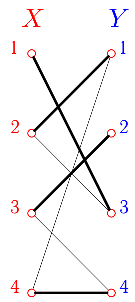

Рис. 4.30

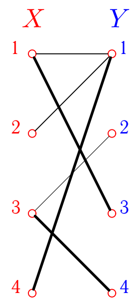

Рис. 4.31

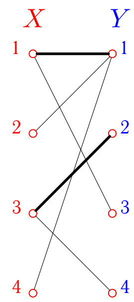

Рис. 4.32

З а м е ч а н и е 1. Паросочетание на рис. 4.28 не единственное. Имеется еще одно наибольшее (3 ребра) паросочетание (рис. 4.31). Множества вершин, не входящие в паросочетание, — это $X_m = \{x_2\}$ и $Y_m = \{y_2\}$. При этом множества X' и Y' не изменятся:

$$X' = \{x_2, x_4\}, \quad Y' = \{y_1\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Паросочетание на рис. 4.28 сразу оказалось наибольшим. Однако можно было бы выбрать и не наибольшее, но максимальное паросочетание (рис. 4.32). В этом случае, обратив чередующуюся цепь x_4, y_1, x_1, y_3 (толстые ребра меняются на тонкие, и наоборот), получим наибольшее покрытие (рис. 4.31).

4.6. Остов наименьшего веса

Остовом графа G называют граф, не содержащий циклов и состоящий из ребер графа G и всех его вершин. Таким образом, остов графа является деревом. Число ребер остова равно рангу графа ($\nu^* = n - k$). Число остовов графа можно вычислить по матрице Кирхгофа (см. с. 76).

З а д а ч а. Дан взвешенный граф (рис. 4.33). Найти число остовов графа и остов графа минимального веса.

В таблице ответов на с. 76 даны веса ребер минимального остова, суммарный вес остова Σ и число остовов графа n_0.

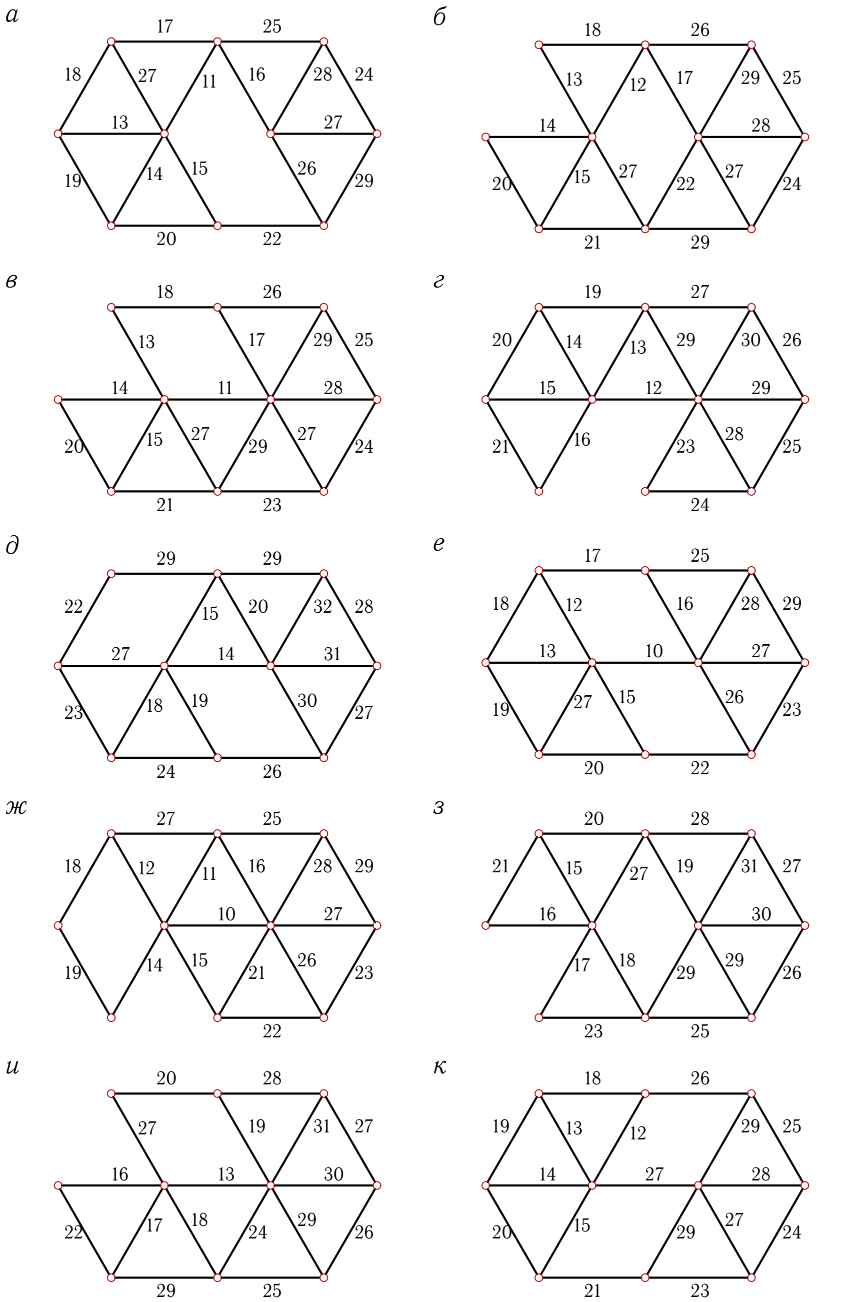
а
17 25 18 27 11 16 28 24 13 27 19 14 15 26 29 20 22
б
18 26 13 12 17 29 25 14 28 20 15 27 22 27 24 21 29
в
18 26 13 17 29 25 14 11 28 20 15 27 29 27 24 21 23
г
19 27 20 14 13 29 30 26 15 12 29 21 16 23 28 25 24
д
29 29 22 15 20 32 28 27 14 31 23 18 19 30 27 24 26
е
17 25 18 12 16 28 29 13 10 27 19 27 15 26 23 20 22
ж
27 25 18 12 11 16 28 29 10 27 19 14 15 21 26 23 22
з
20 28 21 15 27 19 31 27 16 30 17 18 29 29 26 23 25
и
20 28 27 19 31 27 16 13 30 22 17 18 24 29 26 29 25
к
18 26 19 13 12 29 25 14 27 28 20 15 29 27 24 21 23

Рис. 4.33

Ответы

№	Веса ребер остова	Σ	n_0
а	16, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 25, 24	157	3861
б	17, 12, 13, 14, 15, 21, 26, 25, 24	167	3289
в	11, 13, 14, 15, 17, 21, 23, 24, 25	163	3115
г	12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26	168	2584
д	14, 15, 18, 19, 23, 22, 26, 27, 28	192	3910
е	10, 12, 13, 15, 16, 19, 22, 23, 25	155	4095
ж	10, 11, 12, 14, 15, 18, 22, 23, 25	150	2944
з	19, 20, 15, 16, 17, 18, 25, 26, 27	183	3289
и	13, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 26, 27	181	3115
к	27, 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25	174	4095

Пример. Дан взвешенный граф (рис. 4.34).

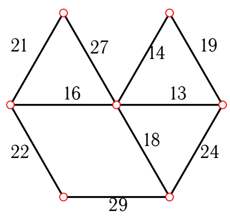

Рис. 4.34

Найти число остовов графа и остов графа минимального веса (экстремальное дерево).

Решение. *Число остовов графа.* Число остовов графа можно вычислить по его матричным характеристикам. Известна следующая теорема.

Теорема 18 (Кирхгофа [1]). *Число остовов графа равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.*

Элементы матрицы Кирхгофа B графа G определяются следующим образом. Если вершины i и j графа G смежны, то $b_{ij} = -1$, а если вершины i и j не смежны, то $b_{ij} = 0$. Диагональные элементы матрицы Кирхгофа B равны степеням вершин: $b_{ii} = \deg(i)$. Очевидно свойство: сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы Кирхгофа равна 0. Известно также, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа равны, а ранг матрицы Кирхгофа

[1] Kirchhoff G. (1824–1887гг.) — немецкий физик и механик.

неографа порядка n можно вычислить по формуле $\operatorname{rank} B = n - k$, где k — число компонент графа.

Пронумеруем вершины графа (рис. 4.35).

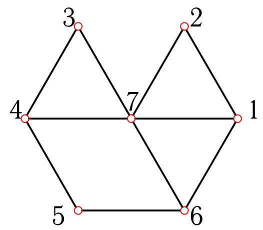

Рис. 4.35

В соответствии с определением запишем матрицу Кирхгофа:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим минор элемента $b_{1,1}$:

$$m_{1,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель: $\det m_{1,1} = 79$. Таким образом, граф имеет 79 остовов, среди которых надо выбрать экстремальное дерево, т.е дерево, обладающее некоторыми эстремальными свойствами, в данным случае — минимальным весом.

Заметим, что матрицу Кирхгофа можно найти, используя формулу

$$B = II^T - 2A, \tag{4.1}$$

где I и A — матрицы инцидентности и смежности графа. Матрицу инцидентности запишем для следующей последовательности номеров ребер: $(3,7)$, $(6,7)$, $(1,2)$, $(6,1)$, $(5,6)$, $(3,4)$, $(2,7)$, $(4,7)$, $(1,7)$, $(4,5)$. Строки матрицы инцидентности соответствуют вершинам, столбцы — ребрам. В неографе матрица инцидентности I состоит из нулей и единиц, а матрица смежности A симметричная:

$$I = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

Формула (4.1) будет проще, если рассмотреть некоторую *ориентацию графа*. Под ориентацией графа понимают орграф, получающийся заменой каждого ребра дугой произвольного направления. Рассмотрим, например, вариант, приведенный на рис. 4.36.

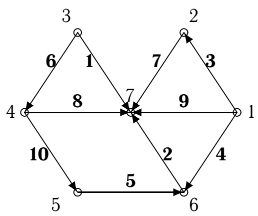

Рис. 4.36

Номера дуг на рисунке указаны полужирным шрифтом в соответствии с номерами ребер исходного графа. Матрица инцидентности I_1 ориентации графа имеет вид

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0&0&-1&-1&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&-1&0&-1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\\ 0&-1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}.$$

Сумма элементов в любом столбце этой матрицы всегда равна 0. Матрица Кирхгофа может быть вычислена по формуле

$$B = I_1 I_1^T. \tag{4.2}$$

Алгоритм Дж. Краскала построения остова минимального веса. Строим граф, присоединяя к пустому графу на множестве вершин заданного графа ребро наименьшего веса [10]. К полученному графу последовательно присоединяем остальные ребра, выбирая на каждом шаге ребро наименьшего веса, не образующее цикл с имеющимися ребрами. В нашем случае начинаем с ребра весом 13 — наименьшего в графе. На рисунках 4.37–4.42 дана последовательность действий. Ребро весом 19 не включается в остов, так как оно образует цикл с ребрами весом 14 и 13.

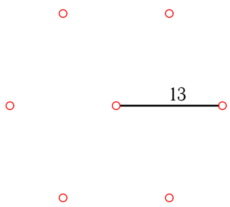

Рис. 4.37

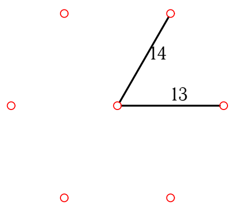

Рис. 4.38

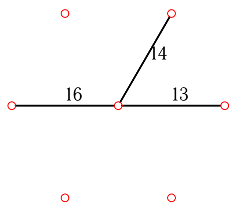

Рис. 4.39

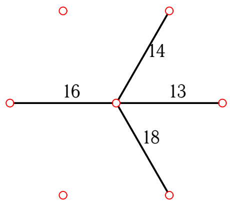

Рис. 4.40

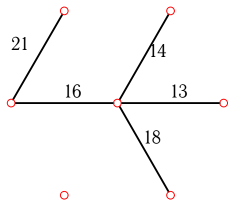

Рис. 4.41

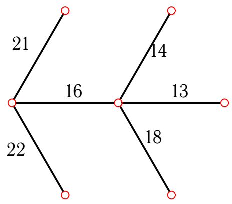

Рис. 4.42

Алгоритм ближайшего соседа построения остова минимального веса. Алгоритм Дж. Краскала требует на каждом шаге проверки на цикличность и предварительной сортировки ребер по весам, что затруднительно для графов с большим числом ребер. Несколько проще следующий алгоритм [13].

1. Отмечаем произвольную вершину графа, с которой начнется построение. Строим ребро наименьшего веса, инцидентное этой вершине.

2. Ищем ребро минимального веса, инцидентное одной из двух полученных вершин. В множество поиска не входит построенное ребро.

3. Продолжаем далее, разыскивая каждый раз ребро наименьшего веса, инцидентное построенным вершинам, не включая в круг поиска все ребра, их соединяющие.

В нашем примере начнем с вершины A. На рисунках 4.43–4.48 дана последовательность действий.

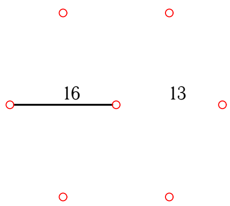

Рис. 4.43

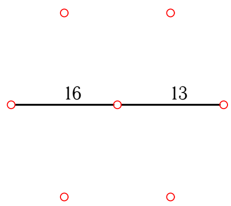

Рис. 4.44

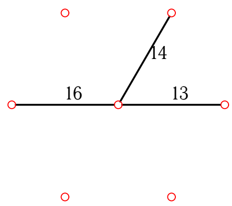

Рис. 4.45

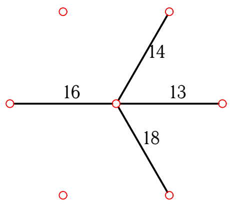

Рис. 4.46

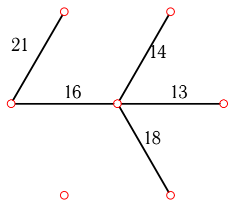

Рис. 4.47

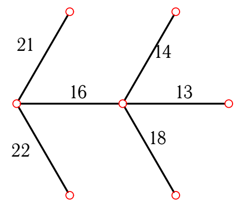

Рис. 4.48

Программа для Maple, использующая встроенные функции, дана на с. 138, программа с визуализацией процесса последовательного построения остова — на с. 141.

4.7. Гамильтоновы циклы

Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым* [1]. Простая цепь, проходящая через все вершины графа, называется *гамильтоновой*.

Задача нахождения гамильтоновых циклов получила свое развитие в связи с рядом практических задач. Одной из них является так называемая *задача коммивояжера*, в которой определяется кратчайший гамильтонов цикл (см. с. 84).

В отличие от поиска эйлеровых циклов, проходящих через каждое ребро графа по одному разу, для которых еще Эйлером получено необходимое и достаточное условие существования цикла, для гамильтоновых циклов такого условия не найдено. Существуют, однако, достаточные условия существования гамильтоновых циклов.

Приведем несколько таких признаков [2].

[1] В 1859 г. Уильям Гамильтон (Hamilton W.) предложил математическую игру-головоломку, связанную с обходом вершин додекаэдра, положив тем самым начало одному из самых известных направлений теории графов.