§ 134. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела

Рассмотрим твердое тело, вращающееся равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси, закрепленной в подшипниках A и B (рис. 350). Свяжем с телом вращающиеся вместе с ним оси $Axyz$. Преимущество таких осей в том, что по отношению к ним координаты центра масс и моменты инерции тела будут величинами постоянными.

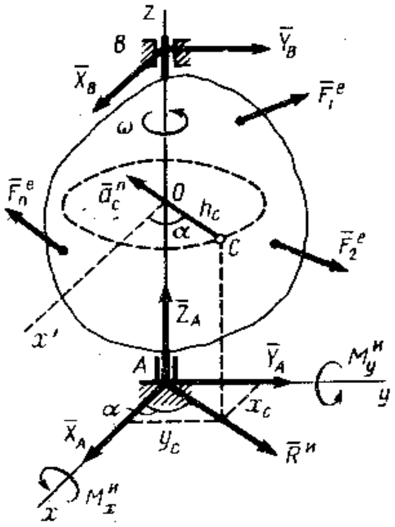

Рис. 350

Пусть на тело действуют заданные силы $F_1^e, F_2^e, ..F_n^e$. Обозначим проекции главного вектора всех этих сил на оси z через R_x^e, R_y^e, R_z^e, а их главные моменты относительно тех же осей — через M_x^e, M_y^e, M_z^e; при этом, так ω=const, то M_z^e=0. Для определения динамических реакций X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B подшипников, т. е. реакций, возникающих при вращении тела, присоединим ко всем действующим на тело заданным силам и реакциям связей силы инерции $F_k^И$ всех частиц тела, приведя их к центру А (см. § 134). Тогда силы инерции будут представлены одной силой, равной $\bar{R}^И$, приложенной в точке А, и парой сил с моментом, равным $\bar{M}_A^И$. Проекции этого момента на оси xyz будут: $M_{xA}^И$, $M_{yA}^И$, $M_{zA}^И = 0$, так как ω=const. Теперь, составляя согласно принципу Даламбера уравнения (88) в проекциях на оси $Axyz$(или соответствующие им уравнения равновесия из §30) и полагая $AB = b$, получим

$$\begin{gathered}
X_A + X_B + R_x^e + R_x^И = 0,\\
Y_A + Y_B + R_y^e + R_y^И = 0,\\
Z_A + R_z^e + R_z^И = 0,\\
-Y_B b + M_x^e + M_x^И = 0,\\
X_B b + M_y^e + M_y^И = 0.
\end{gathered} \tag{92}$$

Последнее уравнение $M_z^e + M_z^И = 0$ удовлетворяется тождественно, так как $M_z^e = 0$ и $M_z^И = 0$. Главный вектор сил инерции $\bar{R}^И = -m\bar{a}_c$ см. формулу (89). При ω=const центр масс C имеет только нормальное ускорение $a_{cn} = \omega^2 h_c$, где h_c — расстояние точки C от оси вращения. Следовательно, направление вектора $\bar{R}^{\text{И}}$ совпадает снаправлением OC. Вычисляя проекция $\bar{R}^{\text{И}}$ на координатные оси и учитывая, что $h_c \cos\alpha = x_c$, $h_c \sin\alpha = y_c$, где x_c и y_c — координаты центра масс, найдем:

$$R_x^{\text{И}} = m\omega^2 h_c \cos\alpha = m\omega^2 x_c,$$

$$R_y^{\text{И}} = m\omega^2 h_c \sin\alpha = m\omega^2 y_c,$$

$$R_z^{\text{И}} = 0.$$

Чтобы определить $M_x^{\text{И}}$ и $M_y^{\text{И}}$, рассмотрим какую-нибудь частицу тела с массой m_k, отстоящую от оси на расстояния h_k. Для нее при ω=const сила инерции тоже имеет только центробежную составляющую $F_k^{\text{И}} = m_k \omega^2 h_k$, проекции которой, как и вектора $R^{\text{И}}$, равны:

$$F_{xk}^{\text{И}} = m_k \omega^2 x_k,$$

$$F_{yk}^{\text{И}} = m_k \omega^2 y_k,$$

$$F_{zk}^{\text{И}} = 0.$$

Тогда (см. §28, формулы (47))

$$m_x(\bar{F}_k^{\text{И}}) = -F_{yk}^{\text{И}} z_k = -m_k \omega^2 y_k z_k,$$

$$m_y(\bar{F}_k^{\text{И}}) = F_{xk}^{\text{И}} z_k = m_k \omega^2 x_k z_k,$$

Составляя такие выражения для всех точек тела, складывая их и выносся общий множитель за скобки, придем к равенствам:

$$\begin{gathered} M_x^{\text{И}} = -\sum m_k \omega^2 y_k z_k = -J_{yz}\omega^2, \\ M_y^{\text{И}} = \sum m_k \omega^2 x_k z_k = J_{xz}\omega^2. \end{gathered} \tag{93}$$

где J_{xz} и J_{yz} — соответствующие центробежные моменты инерции. Подставляя все найденные значения в равенства (92), получим

$$\begin{gathered} X_A + X_B = -R_x^e - m\omega^2 x_c, \\ Y_A + Y_B = -R_y^e - m\omega^2 y_c, \\ Z_A = -R_z^e, \\ X_B b = -M_y^e - J_{xz}\omega^2, \\ Y_B b = M_x^e - J_{yz}\omega^2. \end{gathered} \tag{94}$$

Уравнения (94) и определяют динамические реакции, действующие на ось равномерно вращающегося твердого тела, если осью вращения является ось z. Назовем статическими реакциями те значения реакций, которые дают уравнения (94), если в них положить $\omega = 0$. Как видно из уравнений (94), динамические реакции могут вообще быть значительно больше статических, причем это зависит не только от ω, но и от величин x_c, y_c, J_{xz}, J_{yz}, характеризующих распределение масс по отношению к оси вращения. Однако из уравнений (94) видно, что наличие вращения не будет влиять на значения реакций подшипников если

$$x_c = 0, \quad y_c = 0; \tag{95}$$

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0. \tag{96}$$

Равенства (95) и (96) выражают условия того, что динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, равны статическим реакциям или как говорят, условия динамической уравновешенности вращающегося тела при его вращении вокруг оси z. Условия (95) означают, что центр масс тела должен лежать на оси вращения, а условия (96) — что ось вращения должна быть главной осью инерции тела для начала координат A. При одновременном же выполнении условий (95) и (96) ось Az будет главной центральной осью инерции тела (см. § 104). Таким образом, динамические реакции, действующие на оси вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела. Этот вывод остается справедливым и в случае, когда тело, вращается неравномерно. Рассмотренная задача позволяет одновременно уяснить механический смысл величин J_{xz}, J_{yz}, а именно: центробежные моменты инерции J_{xz}, J_{yz} характеризуют степень динамической неуравновешенности тела при его вращении вокруг оси z. Динамическое уравновешивание вращающихся тел представляет собой важную техническую задачу, которая, как мы видим, сводится к определению главных центральных осей инерции тела.