Пример решения

Задача. Найти угловую скорость ведомого вала 6 планетарного редуктора (рис. 140). Даны угловые скорости ведущего вала 1 и колеса 3: $\omega_{1z} = 10$ с$^{-1}$, $\omega_{3z} = -10$ с$^{-1}$ и радиусы всех колес: $r_1 = 7$ см, $r_2 = 2$ см, $r_3 = 3$ см, $r_4 = 5$ см, $r_5 = 6$ см, $r_6 = 4$ см.

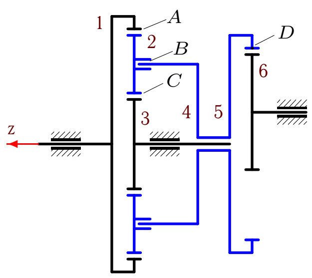

Рис. 140

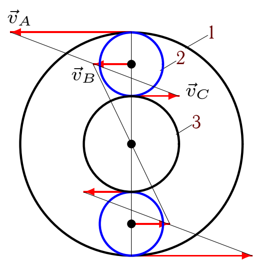

Рис. 141

Решение

Способ 1. Решим задачу с помощью метода мгновенных скоростей. Вычислим скорость внутренней точки A обода колеса 1, совершающего вращательное движение,

$$v_A = \omega_1 r_1 = 70 \text{ см/с}.$$

Скорость точки C внешнем ободе колеса 3 равна

$$v_{\mathrm{C}} = \omega_3 r_3 = 30 \text{ см/с}.$$

Отметим, что в этом способе используются модули скоростей и угловых скоростей. Данные о направлениях вращений тел, которые даны в условии, учитываются геометрически, указанием соответствующих направлений векторов. Так, на рисунке 141 вектор $\vec{v}_A$ направляем налево (так как $\omega_{1z} > 0$, вращение против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z), а вектор $\vec{v}_C$ — направо, так как $\omega_{3z} < 0$. Колесо 2 (сателлит) совершает плоское движение. В силу линейного распределения скоростей в теле имеем

$$v_B = (v_A - v_C)/2 = 20 \text{ см/с}.$$

Здесь скорость точки B получила такое простое выражение только потому, что B лежит посередине между A и C. В общем случае, когда точки A, B и C расположены более общим образом, надо сначала определить угловую скорость тела

$$\omega_2 = (v_A + v_C)/(2r_2) = 100/4 = 24 \text{ с}^{-1}.$$

Затем вычисляем искомую скорость

$$v_B = v_A - \omega_2 r_2 = 70 - 25 \cdot 2 = 20 \text{ см/с},$$

или, что то же,

$$v_B = |v_\text{C} - \omega_2 r_2| = |30 - 25 \cdot 2| = 20 \text{ см/с}.$$

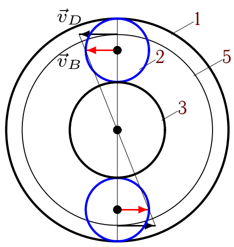

Рис. 142

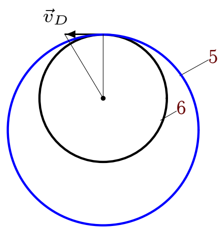

Рис. 143

Так как точка B принадлежит водилу 4 с радиусом r_4, то его угловую скорость, а также и одновременно скорость колеса 5, жестко с ним связанного, найдем по формуле

$$\omega_4 = \omega_5 = v_B/r_4 = 20/5 = 4 \text{ с}^{-1}.$$

Отсюда находим скорость точки D, лежащей на внутреннем ободе колеса 5, находящегося в зацеплении с ведомым валом 6 (рис. 142, 143):

$$v_D = \omega_4 r_5 = 24 \text{ см/с}.$$

В итоге, получаем угловую скорость

$$\omega_6 = v_D/r_6 = 24/4 = 6 \text{ с}^{-1}.$$

Способ 2 (Виллиса). Для решения задачи по этому способу необходимо ввести подвижную систему координат, связанную с водилом 4. В этой системе координат оси колес 1 и 2 неподвижны, а их угловые скорости (относительные) равны соответственно $\omega_{1z} - \omega_{4z}$ и $\omega_{2z} - \omega_{4z}$. При внутреннем зацеплении имеем формулу

$$(\omega_{2z} - \omega_{4z}) r_2 = (\omega_{1z} - \omega_{4z}) r_1. \tag{6.10}$$

При внешнем зацеплении:

$$(\omega_{2z} - \omega_{4z}) r_2 = -(\omega_{3z} - \omega_{4z}) r_3. \tag{6.11}$$

Система (6.10 – 6.11) при заданных в условии величинах имеет решение

$$\omega_{4z} = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_{2z} = 25 \text{ с}^{-1}.$$

Далее, как и раньше [1], определяем скорость точки D $v_{Dx} = -\omega_{4z} r_5 = -24$ см/с и по аналогичной формуле угловую скорость ведомого вала $\omega_{6z} = -v_{Dx}/r_6 = 24/4 = 6$ с$^{-1}$.

Совершенно очевидно, что второй способ более привлекательный. Во-первых, здесь можно получить не только модули угловых скоростей, но и их проекции на ось Z [2]. Кроме того, для решения не требуются рисунки с изображениями векторов скоростей, вычислениями расстояний до МЦС и т. п.

K15. Сложение угловых ускорений

Тело совершает сложное движение с относительной угловой скоростью $\vec{\omega}_r(t)$ и переносной $\vec{\omega}_e(t)$. Найти абсолютное угловое ускорение тела при $t = 0$.

Условия задач

K15. 1.
$\vec{\omega}_e = (2\sin(t) - 1, -t + 2, 2\sin(t) + 2)$,
$\vec{\omega}_r = (t + 3, -7t + 3, 7t + 2)$.

K15. 2.
$\vec{\omega}_e = (4\sin(t) - 1, 3t + 1, 0)$,
$\vec{\omega}_r = (-6t + 1, -3t + 2, 3t + 2)$.

K15. 3.
$\vec{\omega}_e = (t + 2, 2\,\mathrm{tg}(t), 4\sin(t) + 1)$,
$\vec{\omega}_r = (3t, 3, -8t)$.

K15. 4.
$\vec{\omega}_e = (3t + 3, 2t + 1, t + 3)$,
$\vec{\omega}_r = (4t, 2t + 2, t)$.

K15. 5.
$\vec{\omega}_e = (2\sin(t) + 1, t + 3, 3t + 3)$,
$\vec{\omega}_r = (3t + 3, -6t + 2, 10t + 1)$.

K15. 6.
$\vec{\omega}_e = (3t + 3, t + 2, t + 2)$,
$\vec{\omega}_r = (t + 1, 4t + 2, -t + 1)$.

K15. 7.
$\vec{\omega}_e = (t + 1, 4t + 1, 3t + 3)$,
$\vec{\omega}_r = (-t, 4t, 6t + 2)$.

K15. 8.
$\vec{\omega}_e = (3t + 3, 4t + 1, t + 2)$,
$\vec{\omega}_r = (2t + 3, 2t + 2, 2t + 2)$.

K15. 9.
$\vec{\omega}_e = (t + 1, 3t + 3, t + 3)$,
$\vec{\omega}_r = (-6t + 3, -5t, 15t + 3)$.

K15. 10.
$\vec{\omega}_e = (t + 2, t + 1, 4t - 1)$,
$\vec{\omega}_r = (-t + 3, 12t + 3, t + 1)$.

K15. 11.
$\vec{\omega}_e = (2\,\mathrm{tg}(t) + 2, t + 3, 2\sin(t) + 2)$,
$\vec{\omega}_r = (4t + 1, 7t + 3, 2t + 2)$.

K15. 12.
$\vec{\omega}_e = (t + 4, 4\sin(t) + 1, 3t + 3)$,
$\vec{\omega}_r = (6t + 1, 17t + 3, -2t + 3)$.

---

[1] Напомним, для вращательного движения $v_x = -\omega_z R$, $v_y = \omega_z R$.

[2] Иногда такие значения называют алгебраическими значениями угловых скоростей.