Пример 3.38. При $n = 3$ произвольный полином Жегалкина имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus$$

$$\oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0. \qquad (3.27)$$

Следующая формула (3.28) представляет линейный полином Жегалкина (многочлен первой степени):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_nx_n \oplus a_{n-1}x_{n-1} \oplus \ldots \oplus a_1x_1 \oplus a_0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{mod}2)\ a_ix_i \oplus a_0. \qquad (3.28)$$

Пример 3.39. Записать в виде полинома Жегалкина логическую функцию $x_1x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Сначала отметим, что для операции сложения по модулю 2 справедливы следующие равенства (все эти равенства нетрудно подтвердить, составив соответствующие таблицы значений логических функций)

$$1 \oplus 0 = 0, \quad x \oplus 0 = x, \quad x \oplus x = 0$$

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1,$$

$$x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3.$$

Теперь выразим дизъюнкцию через операцию $\oplus$:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2} = \overline{(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 0 =$$

$$= x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2. \qquad (3.29)$$

Используя равенства (3.29) и (3.25), получим

$$x_1x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} = x_1x_2\overline{x_1}\,\overline{x_2} \oplus x_1x_2 \oplus \overline{x_1}\,\overline{x_2} =$$

$$= 0 \oplus x_1x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) = x_1x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 =$$

$$= 0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

Нетрудно построить представление логической функции в виде полинома Жегалкина и в том случае, когда функция задается таблицей истинности.

Пример 3.40. Построить полином Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей 3.26.

Табл. 3.26

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Поскольку функция зависит от трех переменных, общий вид полинома Жегалкина задается равенством (3.27). Подстановка в (3.27) наборов значений переменных (x_1, x_2, x_3) — последовательностей нулей и единиц, приводит к следующим соотношениям для коэффициентов полинома:

$$f(0,0,0) = a_0,$$

$$f(1,0,0) = a_1 \oplus a_0, \quad f(1,1,0) = a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0,$$

$$f(0,1,0) = a_2 \oplus a_0, \quad f(1,0,1) = a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0,$$

$$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0, \quad f(0,1,1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0,$$

$$f(1,1,1) = a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0$$

Для вычисления коэффициентов многочлена необходимо уметь решать простейшие уравнения над полем Z_2. Таблица 3.27 решений таких уравнений согласована с таблицей 3.20.

Табл. 3.27

Уравнение	Решение
$a \oplus 1 = 1$	$a = 0$
$a \oplus 0 = 1$	$a = 1$
$a \oplus 1 = 0$	$a = 1$
$a \oplus 0 = 0$	$a = 0$

Теперь вычислим коэффициенты полинома Жегалкина для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей 3.26.

Поскольку $f(0, 0, 0) = 1$, коэффициент $a_0 = 1$;

$$f(1, 0, 0) = a_1 \oplus a_0 = a_1 \oplus \ 1 = 0, \text{следовательно}, \quad a_1 = 1;$$

$$f(0, 1, 0) = a_2 \oplus a_0 = a_2 \oplus \ 1 = 1, \text{поэтому} \quad a_2 = 0;$$

$$f(0, 0, 1) = a_3 \oplus a_0 = a_3 \oplus \ 1 = 0, \text{значит}, \quad a_3 = 1;$$

$$f(1, 1, 0) = a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = a_{12} \oplus \ 1 \ \oplus \ 0 \ \oplus \ 1 = a_{12} \oplus \ 0 = 1,$$

поэтому $a_{12} = 1$;

$$f(1, 0, 1) = a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = a_{13} \oplus \ 1 \ \oplus \ 1 \ \oplus \ 1 = a_{13} \oplus \ 1 = 0,$$

поэтому $a_{13} = 1$;

$$f(0, 1, 1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = a_{23} \oplus \ 0 \ \oplus \ 1 \ \oplus \ 1 = a_{23} \oplus \ 0 = 0,$$

следовательно, $a_{23} = 0$;

$$f(1, 1, 1) = a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 =$$

$$= a_{123} \oplus \ 1 \oplus \ 1 \oplus \ 0 \ \oplus \ 1 \ \oplus \ 0 \ \oplus \ 1 \oplus \ 1 = a_{123} \oplus \ 1 = 1, \text{поэтому} \quad a_{123} = 0.$$

В результате

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus \ 1.$$

Наконец, отметим без доказательства следующую теорему.

Теорема 3.9. *Любая логическая функция может быть представлена полиномом Жегалкина, причем такое представление единственно.*