Геометрические характеристики плоской фигуры

Найти площадь (в см^2) и координаты центра тяжести плоской фигуры (в см). Отметки на осях даны в сантиметрах.

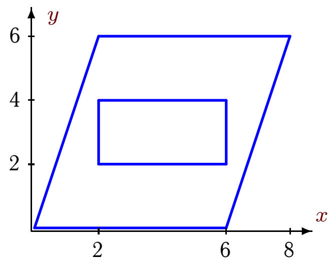

Рис. 1

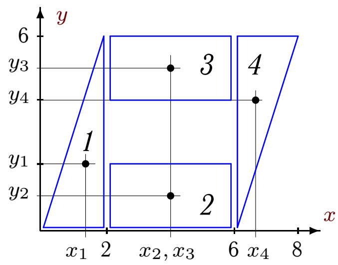

Рис. 2

Решение

Задачу решаем методом разбиения фигуры на части. Представим фигуру из двух одинаковых треугольников 1 и 4 и двух одинаковых прямоугольников 2 и 3. Вычислим их площади $F_1 = F_4 = 2 \cdot 6/2 = 6$ см, $F_2 = F_3 = 2 \cdot 4 = 8$ см. Получим общую площадь

$$F = \sum_i F_i = 2(F_1 + F_2) = 2(6 + 8) = 28 \text{ см}^2.$$

Отметим на рисунке положения центров тяжести частей (рис. 2). Центр тяжести прямоугольника находится на пересечении его диагоналей: $x_2 = x_3 = 4$ см, $y_2 = 1$ см, $y_3 = 5$ см, расстояние от центра тяжести прямоугольного треугольника до вершины прямого угла, отмеренное вдоль катета, составляет 1/3 длины катета. Отсюда $x_1 = 4/3$ см, $y_1 = 6/3 = 2$ см, $x_4 = 6 + 2/3 = 20/3$ см, $y_4 = 4$ см,

$$
\begin{aligned}
x_c &= \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{6\cdot 4/2 + 8\cdot 4 + 8\cdot 4 + 6\cdot 20/3}{28} = 4 \text{ см},\\
y_c &= \frac{\sum_i F_i y_i}{F} = \frac{6\cdot 2 + 8\cdot 1 + 8\cdot 5 + 6\cdot 4}{28} = 3 \text{ см}.
\end{aligned}
$$

Представленное разбиение фигуры на части не единственное. Возможны также вырезанные части фигуры.

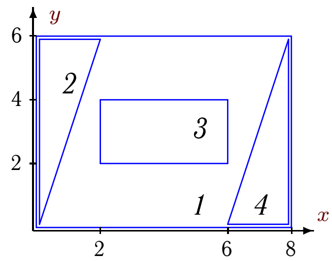

Рис. 3

На рисунке 3 из прямоугольника 1 размером 8×6 вырезаны треугольники 2 и 4 с катетами 2 и 6 и прямоугольник 3 размером 4×2. В формулах вычисления площади и координат центра тяжести площадям вырезанных фигур приписывается знак минус:

$$
F = \sum_i F_i = 48 - 2\cdot 6 - 4\cdot 2 = 28 \text{ см}^2.
$$

Координаты центра тяжести

$$
\begin{aligned}
x_c &= \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{48\cdot 4 - 6\cdot 2/3 - 8\cdot 4 - 6\cdot 22/3}{28} = 4 \text{ см},\\
y_c &= \frac{\sum_i F_i y_i}{F} = \frac{48\cdot 3 - 6\cdot 4 - 8\cdot 3 - 6\cdot 2}{28} = 3 \text{ см}.
\end{aligned}
$$

Оба способа дают один и тот же результат. Однако для проверки решения можно применить принципиально другой способ решения задач, свободный от необходимости разбиения фигуры на части. Этот способ, основанный на формуле Грина, описан в [1]. Для решения задачи по формуле Грина удобно использовать компьютер. В частности, в [1] приводится маплет[1], в который для решения задачи необходимо только ввести координаты точек контура фигуры.

[1] маплет — удобный графический интерфейс к программам системы Maple, облегчающий работу с программой и защищающий ее от непреднамеренных ошибок. В [1] описан язык программирования маплетов, немного отличающийся от языка Maple.

Литература

[1] *Кирсанов М. Н.* Maple и Maplet. Решение задач механики—СПб.: Лань, 2012.