

Центр тяжести тела, составленного из пластин

Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из двух однородных пластин. Размеры даны в метрах (рис. 1).

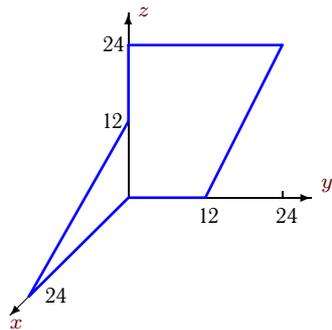


Рис. 1

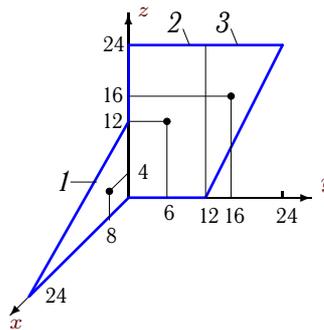


Рис. 2

Решение

Разобьем фигуру на три отдельные фигуры, площади и центры тяжести которых легко вычисляются. Разбиение это, конечно, не единственное. Очевиден вариант из двух прямоугольных треугольников с катетами 12 и 24 и прямоугольника размером 12×24 (рис. 2). Имеем площади фигур:

$$F_1 = F_3 = 12 \cdot 24 / 2 = 144 \text{ м}^2, \quad F_2 = 12 \cdot 24 = 288 \text{ м}^2.$$

Общая площадь: $F = F_1 + F_2 + F_3 = 576 \text{ м}^2$. Координаты центров тяжести частей (в метрах)

$$\begin{aligned} x_1 = 8, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 4, \\ x_2 = 0, \quad y_2 = 6, \quad z_2 = 12, \\ x_3 = 0, \quad y_3 = 12 + 12/3 = 16, \quad z_3 = 2 \cdot 24/3 = 16. \end{aligned}$$

Находим координаты центра тяжести фигуры

$$x_c = \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{F_1 \cdot x_1}{F} = \frac{144 \cdot 8}{576} = 2 \text{ м},$$

$$y_c = \frac{\sum_i F_i y_i}{F} = \frac{F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F} = \frac{288 \cdot 6 + 144 \cdot 16}{576} = 7 \text{ м},$$

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{\sum_i F_i z_i}{F} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F} = \\ &= \frac{144 \cdot 4 + 288 \cdot 12 + 144 \cdot 16}{576} = 11 \text{ м}. \end{aligned}$$

Для проверки разобьем фигуру другим способом, взяв за фигуру 2 квадрат со стороной 24, а фигура 3 — это в, таком случае, треугольник, вырезанный из этого квадрата (рис. 3).

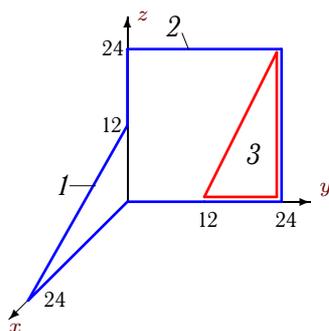


Рис. 3

Площади вырезанной фигуры приписывается знак минус. В остальном процедура вычисления координат центра тяжести прежняя: $F_1 = 12 \cdot 24/2 = 144 \text{ м}^2$, $F_2 = 24 \cdot 24 = 576 \text{ м}^2$, $F_3 = -12 \cdot 24/2 = -144 \text{ м}^2$. Общая площадь: $F = F_1 + F_2 + F_3 = 576 \text{ м}^2$. Координаты центров тяжести

частей (в метрах)

$$\begin{aligned}x_1 &= 8, & y_1 &= 0, & z_1 &= 4, \\x_2 &= 0, & y_2 &= 12, & z_2 &= 12, \\x_3 &= 0, & y_3 &= 12 + 2 \cdot 12/3 = 20, & z_3 &= 24/3 = 8.\end{aligned}$$

Находим координаты центра тяжести фигуры

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{F_1 \cdot x_1}{F} = \frac{144 \cdot 8}{576} = 2 \text{ м}, \\y_c &= \frac{\sum_i F_i y_i}{F} = \frac{F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F} = \frac{576 \cdot 12 - 144 \cdot 20}{576} = 7 \text{ м}, \\z_c &= \frac{\sum_i F_i z_i}{F} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F} = \\&= \frac{144 \cdot 4 + 576 \cdot 12 - 144 \cdot 8}{576} = 11 \text{ м}.\end{aligned}$$

Ответ получился тем же, проверка выполнена.