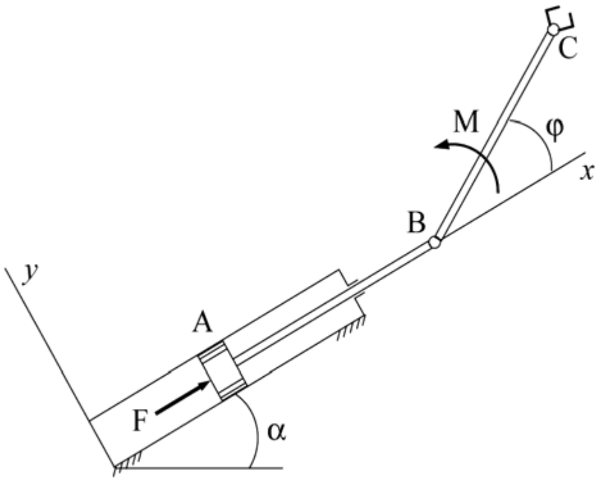

Манипулятор работает в вертикальной плоскости. Известны масса поршня А вместе со штоком m_1, масса схвата С m_2, длина невесомого звена ВС= $l;$ α – угол наклона цилиндра к горизонту, $F_x = F_{0x} - a\dot{x} - bx$, $M_z = M_{0z} + U_z$, a, b константы, $U_z = -N(\varphi - \varphi_0)$ управление. За обобщенные координаты принять угол φ и координату x поршня, отсчитываемую от положения равновесия.

Требуется:

1. Составить уравнения движения в форме Лагранжа.
2. Определить M_{0z}, F_{0x} из условия равновесия при $x_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$ и $U_z = 0$.
3. Линеаризовать уравнения в окрестности положения равновесия.
4. Записать характеристический полином полученной линейной системы.
5. Исследовать устойчивость позиционирования (по Гурвицу).

1. Вывод уравнений движения.

Рассматриваемый механизм представляет собой механическую систему с двумя степенями свободы, движение которой ограничено идеальными голономными связями. Уравнения движения манипулятора могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \tag{1}$$

В (1) $T(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi})$ кинетическая энергия системы, равная сумме кинетической энергии T_1 поршня A со штоком, совершающего поступательное движение,

$$T_1 = \tfrac{1}{2} m_1 V_A^2, \tag{2}$$

и кинетической энергии T_2 точечного схвата C

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_2 V_C^2. \tag{3}$$

Определим скорости точек A и C. В проекции на оси Oxy

$$V_{Ax} = \dot{x}, \quad V_{Ay} = 0, \quad V_A^2 = \dot{x}^2, \tag{4}$$
$$V_{Cx} = \dot{x} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi}, \quad V_{Cy} = l\cos\varphi\,\dot{\varphi},$$
$$V_C^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}l\sin\varphi\,\dot{\varphi}.$$

Тогда общая кинетическая энергия системы

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 - m_2 l\,\dot{x}\sin\varphi\dot{\varphi} \tag{5}$$

Обобщенные силы Q_x и Q_φ, входящие в уравнения Лагранжа (1), найдем, вычисляя суммарную мощность активных сил и моментов $N_a^в$ на возможном движении:

$$N_a^в = (\vec{F}, \vec{V}_A^в) + (\vec{M}, \vec{\omega}_{BC}^в) + (m_1\vec{g}, \vec{V}_A^в) + (m_2\vec{g}, \vec{V}_C^в). \tag{6}$$

Проецируя вектора в формулах (5) на оси Oxy, получим

$$N_A^в = F_x V_{Ax}^в + m_1 g_x V_{Ax}^в + m_2 g_x V_{Cx}^в + m_2 g_y V_{Cy}^в + M_z \omega_{BCz}^в \tag{7}$$

Принимая во внимание, что

$$\omega_{BCz}^в = \dot{\varphi}^в, \quad V_{Ax}^в = \dot{x}^в, \quad V_{Cx}^в = \dot{x}^в - l\sin\varphi\dot{\varphi}^в,$$
$$V_{Cy}^в = l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^в, \quad g_x = -g\sin\alpha, \quad g_y = -g\cos\alpha, \tag{8}$$

получим разложение для мощности $N_a^в$ по обобщенным возможным скоростям

$$N_A^в = (F_x - m_1 g\sin\alpha - m_2 g\sin\alpha)\dot{x}^в + (M_z - m_2 g\,l\cos(\varphi + \alpha))\dot{\varphi}^в. \tag{9}$$

Следовательно, обобщенные силы будут равны соответственно:

$$Q_x = F_x - m_1 g\sin\alpha - m_2 g\sin\alpha,$$
$$Q_\varphi = M_z - m_2 g\,l\cos(\varphi + \alpha). \tag{10}$$

Так, как по условию задачи

$$F_x = F_{0x} - a\dot{x} - bx, \quad M_z = M_{0z} + U_z,$$

получим обобщенные силы в виде:

$$Q_x = F_{0x} - a\dot{x} - bx - (m_1 + m_2)g\sin\alpha,$$
$$Q_\varphi = M_{0z} - N(\varphi - \varphi_0) - m_2 g\,l\cos(\varphi + \alpha). \tag{11}$$

Вычислим необходимые для построения уравнений Лагранжа производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x}-m_2 l\sin\varphi\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2 l\sin\varphi\ddot{\varphi}-m_2 l\cos\varphi\dot{\varphi}^2, \tag{12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-m_2 l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m_2 l^2\dot{\varphi}-m_2 l\dot{x}\sin\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m_2 l^2\ddot{\varphi}-m_2 l\ddot{x}\sin\varphi-m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

В соответствии с полученными в (11) и (12) результатами запишем уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2 l\sin\varphi\ddot{\varphi}-m_2 l\cos\varphi\dot{\varphi}^2=F_{0x}-a\dot{x}-bx-(m_1+m_2)g\sin\alpha,\\ &m_2 l^2\ddot{\varphi}-m_2 l\ddot{x}\sin\varphi=M_{0z}-N(\varphi-\varphi_0)-m_2 g l\cos(\varphi+\alpha).\end{aligned} \tag{13}$$

2. Определение силовых воздействий в положении равновесия.

Уравнения равновесия системы в положении, соответствующем заданным значениям обобщенных координат:

$$x_0=0,\ \ \dot{x}=0,\ \ \varphi=\varphi_0,\ \ \dot{\varphi}=0, \tag{14}$$

получаются из уравнений (13), если положить значения первых и вторых производных обобщенных координат равными нулю. Уравнения равновесия можно также получить из условия равенства нулю обобщенных сил (11) в положении равновесия (14):

$$\begin{aligned}&F_{0x}-(m_1+m_2)g\sin\alpha=0,\\ &M_{0z}-m_2 g l\cos(\varphi_0+\alpha)=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, формулы (15) определяют значения силы F_{0x} и момента M_{0z}, при которых манипулятор будет позиционирован в заданном положении.

3. Линеаризация уравнений движения около положения равновесия.

При линеаризации уравнений движения предполагается, что отклонения от положения равновесия являются малыми величинами. Обозначим отклонения от положения равновесия:

$$y_1 = x - x_0, \quad y_2 = \varphi - \varphi_0. \tag{16}$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\varphi = \varphi_0 + y_2, \quad x = x_0 + y_1, \quad \dot{y}_1 = \dot{x}, \quad \ddot{y}_1 = \ddot{x}, \quad \dot{y}_2 = \dot{\varphi}, \quad \ddot{y}_2 = \ddot{\varphi}. \tag{17}$$

Для тригонометрических функций, входящих в уравнения (13) имеем:

$$\begin{aligned}
&\sin\varphi = \sin(\varphi_0 + y_2) = \sin\varphi_0 \cos y_2 + \cos\varphi_0 \sin y_2, \\
&\cos\varphi = \cos(\varphi_0 + y_2) = \cos\varphi_0 \cos y_2 - \sin\varphi_0 \sin y_2, \\
&\cos(\varphi + \alpha) = \cos(\varphi_0 + \alpha + y_2) = \cos(\varphi_0 + \alpha)\cos y_2 - \sin(\varphi_0 + \alpha)\sin y_2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Принимая во внимание только линейные по малым отклонениям y_2 слагаемые, из (18) получим:

$$\begin{aligned}
&\sin\varphi = \sin\varphi_0 + y_2\cos\varphi_0, \quad \cos\varphi = \cos\varphi_0 - y_2\sin\varphi_0, \\
&\cos(\varphi + \alpha) = \cos(\varphi_0 + \alpha) - y_2\sin(\varphi_0 + \alpha).
\end{aligned} \tag{19}$$

Подставим в (13) результаты (17), (19) и отбросим нелинейные слагаемые $\ddot{y}_1 y_2, \dot{y}_2^2, \dot{y}_2^2 y_2, \ddot{y}_2 y_2$. Тогда придем к уравнениям, содержащим только линейные по отклонениям y_1, y_2 слагаемые

$$\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 - m_2 l\,\ddot{y}_2 \sin\varphi_0 = F_{0x} - a\dot{y}_1 - b y_1 - (m_1 + m_2) g \sin\alpha, \\
&m_2 l^2 \ddot{y}_2 - m_2 l\,\ddot{y}_1 \sin\varphi_0 = M_{0z} - N y_2 - m_2 g l \cos(\varphi_0 + \alpha) + m_2 g l\, y_2 \sin\varphi_0.
\end{aligned} \tag{20}$$

С учетом формул (15), определяющих величины F_{0x} и M_{0z}, окончательно получим линейные уравнения малых колебаний около положения равновесия:

$$\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 - m_2 l\,\ddot{y}_2 \sin\varphi_0 + a\dot{y}_1 + b y_1 = 0, \\
&m_2 l^2 \ddot{y}_2 - m_2 l\,\ddot{y}_1 \sin\varphi_0 + (N - m_2 g l \sin\varphi_0) y_2 = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

4. Вывод характеристического уравнения системы уравнений малых колебаний.

Линейная система дифференциальных уравнений (21) может быть записана в матричной форме с использованием матрицы $\mathbf{f}(D)$ оператора дифференцирования по времени $D = \dfrac{d}{dt}$:

$$\mathbf{f}(D)\mathbf{y} = 0, \tag{22}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ - вектор переменных состояния, а $\mathbf{f}(D)$ - матрица (2×2):

$$\mathbf{f}(D)=\begin{pmatrix}(m_1+m_2)D^2+aD+b & -m_2 l\sin\varphi_0 D^2\\ -m_2 l\sin\varphi_0 D^2 & m_2 l^2 D^2+N-m_2 g\, l\sin\varphi_0\end{pmatrix}. \qquad (23)$$

По определению, характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (22) есть: $\det\mathbf{f}(\lambda)=0$, значит, в нашем случае:

$$\det\mathbf{f}(\lambda)=\det\begin{pmatrix}(m_1+m_2)\lambda^2+a\lambda+b & -m_2 l\sin\varphi_0\lambda^2\\ -m_2 l\sin\varphi_0\lambda^2 & m_2 l^2\lambda^2+N-m_2 g\, l\sin\varphi_0\end{pmatrix}=0.$$

Вычисляя определитель, получим:

$$\begin{aligned}&m_2(m_1{+}m_2\cos^2\varphi_0)\,l^2\lambda^4+m_2 l^2 a\,\lambda^3+((m_1{+}m_2)(N{-}m_2 gl\sin\varphi_0){+}m_2 l^2 b)\lambda^2\\&+(N-m_2 gl\sin\varphi_0)a\lambda+(N-m_2 gl\sin\varphi_0)b=0\end{aligned}. \qquad (24)$$

Многочлен четвертого порядка (24) и есть характеристическое уравнение системы (21).

5. Исследование устойчивости позиционирования.

Известно, что поведение решения системы линейных дифференциальных уравнений определяется значениями корней ее характеристического уравнения. Если все корни имеют отрицательные действительные части, то решение асимптотически убывает. Такая система уравнений называется асимптотически устойчивой.

Согласно критерию Гурвица, корни многочлена с положительным коэффициентом при старшей степени лежат в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны.

Возьмем уравнение четвертого порядка

$$a_0\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0,\quad a_0>0.$$

Матрица Гурвица для него имеет вид:

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}a_1 & a_3 & 0 & 0\\ a_0 & a_2 & a_4 & 0\\ 0 & a_1 & a_3 & 0\\ 0 & a_0 & a_2 & a_4\end{pmatrix},$$

а условия Гурвица отрицательности действительных частей корней будут:

$$\Delta_1=a_1>0,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix}>0,\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_3 & 0\\ a_0 & a_2 & a_4\\ 0 & a_1 & a_3\end{vmatrix}>0,\ \ \Delta_4=\Delta_3 a_4>0. \qquad (26)$$

Матрица Гурвица для характеристического уравнения (24) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} m_2l^2a & (N-m_2gl\sin\varphi_0)a & 0 & 0 \\ m_2l^2(m_1+m_2\cos^2\varphi_0) & (m_1+m_2)(N-m_2gl\sin\varphi_0)+m_2l^2b & (N-m_2gl\sin\varphi_0)b & 0 \\ 0 & m_2l^2a & (N-m_2gl\sin\varphi_0)a & 0 \\ 0 & m_2l^2(m_1+m_2\cos^2\varphi_0) & (m_1+m_2)(N-m_2gl\sin\varphi_0)+m_2l^2b & (N-m_2gl\sin\varphi_0)b \end{pmatrix}$$

Главные диагональные миноры равны:

$\Delta_1 = m_2 l^2 a$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_2 l^2 a & (N-m_2 gl\sin\varphi_0)\,a \\ m_2 l^2(m_1+m_2\cos^2\varphi_0) & (m_1+m_2)(N-m_2 gl\sin\varphi_0)+m_2l^2b \end{vmatrix}, \qquad (27)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_2l^2a & (N-m_2gl\sin\varphi_0)a & 0 \\ m_2l^2(m_1+m_2\cos^2\varphi_0) & (m_1+m_2)(N-m_2gl\sin\varphi_0)+m_2l^2b & (N-m_2gl\sin\varphi_0)b \\ 0 & m_2l^2a & (N-m_2gl\sin\varphi_0)a \end{vmatrix},$$

$\Delta_4 = \Delta_3(N - m_2gl\sin\varphi_0)b$.

В результате вычислений получим:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = m_2l^2a \\ &\Delta_2 = m_2^2al^2((N - m_2gl\sin\varphi_0)\sin^2\varphi_0 + bl^2), \\ &\Delta_3 = (N - m_2gl\sin\varphi_0)^2 m_2^2 l^2a^2\sin^2\varphi_0, \\ &\Delta_4 = (N - m_2gl\sin\varphi_0)^3 m_2^2 l^2a^2b\sin^2\varphi_0. \end{aligned} \qquad (28)$$

Как следует из (26) и (28), условия Гурвица выполняются, если

$$a > 0, \quad (N - m_2gl\sin\varphi_0)\sin^2\varphi_0 + bl^2 > 0,$$

$$(N - m_2gl\sin\varphi_0)b > 0, \quad \sin\varphi_0 \neq 0. \qquad (29)$$

Таким образом, константы a, b, N, задающие силы и моменты, действующие на манипулятор, должны удовлетворять требованиям:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad N > m_2\,gl\sin\varphi_0, \quad \sin\varphi_0 \neq 0. \qquad (30)$$

В случае, когда $\sin\varphi_0 = 0$, условия Гурвица не могут быть выполнены.