РАЦИОНАЛЬНАЯ ОСЬ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Рациональной осью трехшарнирной арки заданного пролета и заданной стрелы подъема называется такая ось, при которой поперечные сечения арки, требуемые условиями прочности, будут наименьшими. Уменьшение поперечных размеров связано со снижением действительного напряжения, которое в арках определяется формулой

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} y.$$

Очевидно, что наименьшая величина действительного напряжения будет в том случае, когда значение изгибающего момента в сечении будет равно нулю. Последнее же возможно в том случае, когда равнодействующая внутренних сил проходит через центр сечения. Этому условию должны удовлетворять все сечения арки, а это равносильно тому, что рациональная ось арки должна совпадать с кривой давления. Построение кривой давления связано с учетом влияния самого поперечного сечения арки, что сильно осложняет аналитическое изучение вопроса. Поэтому обычно изучение вопроса о рациональной оси арки производят на условной, так называемой «тонкой» арке, не имеющей поперечных размеров. В такой арке кривая давлений совпадает с веревочной кривой для заданной нагрузки. Погрешности, имеющие место при таком рассмотрении, обычно невелики, и влиянием их на контур оси действительной, арки можно пренебречь[1].

Вид веревочной кривой зависит от величины и расположения нагрузки. Положение ее в трехшарнирной арке вполне определяется тремя точками шарниров, но изменение ее между шарнирами зависит от характера размещения нагрузки по арке. При действии на арку подвижной нагрузки веревочная кривая, проходя вс время через три шарнира, будет непрерывно изменять свое положение относительно оси между шарнирами в зависимости от положения нагрузки.

1. **Действие вертикальной нагрузки.** Предположим, что арка находится под действием любой вертикальной сплошной нагрузки ds. Вырезаем из арки элемент длиной ds и учтя, что при слиянии оси арки с веревочной кривой момент и поперечная сила в ее сечении должны быть равны нулю, уравновешиваем элемент двумя нормальными силами N и $N + dN$. Так как выделенный элемент под действием приложенных к нему сил находится в равновесии, то можно написать следующее уравнение равновесия:

$$N \sin(d\varphi/2) + (N + dN) \sin(d\varphi/2) - q_x dx \cos(\varphi) = 0. \qquad (113)$$

По малости угла $d\varphi$ можно принять $\sin(d\varphi/2) = d\varphi/2$; величиной $dN d\varphi/2$ как бесконечно малой второго порядка можно пренебречь; $dx = ds \cos(\varphi)$.

При этих условиях уравнение (113) приведется к виду:

[1] Учет этого влияния можно найти в статье проф. В. И. Руднева «Рациональная ось арок» (Юбилейный сборник акад. Е. О. Патона, Киев).

$$N d\varphi = q_x ds \cos^2(\varphi). \qquad (114)$$

Так как при действии только вертикальной нагрузки проекции на горизонталь нормальной силы во всех сечениях арки равны распору

$$N \cos\varphi = H,$$

то уравнение (114) может быть преобразован:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{q_x \cos^3\varphi}{H} \qquad (115)$$

Как известно, отношение

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$$

Подставив выражения $\frac{d\varphi}{ds}$ и $\cos\varphi$ в уравнение (115) и сделав приведение, получим дифференциальное уравнение кривой оси арки при действии на нее вертикальной нагрузки

$$y'' = \pm\frac{q_x}{H} \qquad (116)$$

Знак в этом уравнении должен выбираться в соответствии с расположением центра кривизны относительно координатных осей. Если центр кривизны расположен со стороны положительных ординат, то берется знак плюс, если со стороны отрицательных ординат, минус.

Рассмотрим следующие два частных типичных случая загружения арки.

1. Арка находится под действием сплошной равномерно распределенной нагрузки (фиг.268). За начало координат примем левый опорный шарнир. Дифференциальное уравнение (116) оси напишется так:

$$y'' = -\frac{q_x}{H}$$

После двукратного интегрирования по лучим выражение ординат оси арки:

$$y' = -\frac{q_x}{H}x + C_1.$$

$$y = -\frac{q_x}{H}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Входящие в него постоянные C_1 и C_2 определяются из условий: при $x = 0$, $y = 0$, $C_2 = 0$, а при $x = l_1$, $y' = 0$, $C_1 = ql_1/H$. В соответствии с этим уравнение ординат оси напишется так:

$$y = \frac{q}{2H}x(2l_1 - x). \qquad (117)$$

Следовательно, при действии сплошной вертикальной равномерно распределенной нагрузки рациональная ось арки очерчивается по параболе.

2. Арка находится под действием вертикальной сплошной нагрузки, нарастающей соответственно очертанию оси арки (фиг. 269). В этом случае нагрузка на каждый элемент арки определяется величиной

$$q_x = q + \gamma y,$$

где y – удельный вес нагрузки над осью арки. Приняв за начало координат средний шарнир на вершине арки, напишем диференциальное уравнение оси арки (116):

$$y'' = \frac{q}{H} + \frac{\gamma y}{H}$$

Обозначив $\frac{\gamma y}{H}$ через k^2, получим:

$$y'' - k^2 y = \frac{q}{H}.$$

Так как правая часть этого уравнения — величина постоянная, то из решения этого дифференциального уравнения получим уравнение ординат оси арки

$$y = A_1 \operatorname{sh} kx + A_2 \operatorname{ch} kx - \frac{q}{Hk^2},$$

$$y' = kA_1 \operatorname{ch} kx + kA_2 \operatorname{sh} kx.$$

Входящие в это уравнение постоянные A_1 и A_2 определяются из условий: при $x = 0$, $y = 0$, $A_2 = \frac{q}{Hk^2}$, и при $x = 0$, $y' = 0$, $A_1 = 0$. Таким образом уравнение рациональной оси при нагрузке указанного вида (фиг. 269) будет:

$$y = \frac{q}{Hk^2}(\operatorname{ch} kx - 1) = \frac{q}{\gamma}(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\gamma}{H}} x - 1) \tag{118}$$

Это уравнение носит название *катеноида Легея* (Legay). Для определения величины входящего в это уравнение распора H следует использовать условие положения пятовых шарниров, т. е. что при $x = \pm 0.5l$, $y = f$. Для более удобного вычисления ординат Штрасснер (Strassner) преобразовал уравнение Легея. Он обозначил отношение нагрузки на опоре q_s к нагрузке в ключе q

$$\frac{q_s}{q} = m = \frac{q + \gamma f}{q}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{q}{\gamma} = \frac{f}{m-1};\ k^2 = \frac{\gamma}{H} = \frac{(m-1)q}{fH}$$

Обозначив отношение $\frac{x}{0.5l}$ через ξ, получим уравнение катеноида по Штрасснеру (118):

$$y = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k_1 \xi - 1), \tag{119}$$

$$k_1 = k\frac{l}{4} = \frac{m-l}{fH} q \frac{l^2}{4}.$$

Для облегчения вычисления ординат по этому уравнению пользуются специальными таблицами.