По книге Б.Н.Иванова "Дискретная математика", М.:2007, с.148-150

Рекуррентные соотношения

1. Докажем справедливость необходимой формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{n+k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \tag{1}$$

Доказываем эту формулу по индукции. При $k = 0$ известна сумма геометрической прогрессии ($x < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{2}$$

Предполагаем, что (1) справедлива при k, доказываем, что эта же формула справедлива при $k+1$. Степенные ряды можно дифференцировать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(n-1)!k!} x^{n-1} = (k+1)\frac{1}{(1-x)^{k+2}} \tag{3}$$

Вводим обозначение $m = n - 1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k+1+m)!}{m!k!} x^m = (k+1)\frac{1}{(1-x)^{k+2}} \tag{4}$$

Делим последнее соотношение на $k+1$ и получаем равенство (1) при $k+1$.

2. Дифференцируя (2), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Умножаем это равенство на x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}. \tag{5}$$

Аналогично имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}. \tag{6}$$

Пример 1

Найти решение рекуррентного уравнения

$$u_{n+1} = u_n + (n+1), \ u_0 = 1. \tag{7}$$

Решение

Умножаем (7) на x^n

$$x^n u_{n+1} = x^n u_n + x^n(n+1), \ u_0 = 1. \tag{8}$$

Суммируем

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n u_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n u_n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n(n+1), \ u_0 = 1. \tag{9}$$

Находим соответствующие производящие функции. По определению

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n u_n = U(x).$$

Найдем производящую функцию

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} x^n u_{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} u_{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} x^m u_m = \frac{U - x^0 u_0}{x}.$$

Отсюда и на основе (2) и (5):

$$\frac{U(x) - u_0}{x} = U(x) + \frac{1}{(1-x)^2} \tag{10}$$

При $u_0 = 1$

$$U(x) = \frac{1 - x + x^2}{(1-x)^3} = (1 - x + x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \tag{11}$$

или

$$U(x) = (1 - x + x^2)\sum_{n=0}^{\infty} C_2^{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n. \tag{12}$$

Сравнивая коэффициенты, получаем[1]

$$u_n = C_2^{n+2} - C_2^{n+1} + C_2^n = (n^2 + n + 2)/2.$$

Пример 2

Найти решение рекуррентного уравнения

$$u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n, \ \ u_0 = -4, \ \ u_1 = 5. \tag{13}$$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Находим два корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Решение уравнения имеет вид

$$u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ имеем систему уравнений для констант

$$\begin{aligned} -4 &= C_1 + C_2, \\ 5 &= C_1 - 3C_2. \end{aligned}$$

Находим константы $C_1 = -7/4$, $C_2 = -9/4$. В итоге получаем искомое решение

$$u_n = -(9(-3)^n + 7)/4. \tag{14}$$

Проверить решение можно при $n = 2$. Из (14) при этом получаем $u_2 = -(9 \cdot 9 + 7)/4 = -22$. Из (13) при $n = 0$ имеем $u_2 = -2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) = -22$.

[1]Очевидно, в общем случае из условия $x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ следует $u_n = a_{n-k}$.