Рекуррентные уравнения[1]

Справедлива формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{n+k} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} t^n = \frac{1}{(1-t)^{k+1}} \tag{1}$$

Доказываем эту формулу по индукции. При $k = 0$ известна сумма геометрической прогрессии ($t < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

Предполагаем, что (1) справедлива при k, доказываем, что эта же формула справедлива при $k+1$. Степенные ряды можно дифференцировать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(n-1)!k!} t^{n-1} = (k+1)\frac{1}{(1-t)^{k+2}} \tag{2}$$

Вводим обозначение $m = n - 1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k+1+m)!}{m!k!} t^m = (k+1)\frac{1}{(1-t)^{k+2}} \tag{3}$$

Делим последнее соотношение на $k+1$ и получаем равенство (1) при $k+1$.

Пример.

$$x_{n+1} = x_n + (n+1), \ \ x_0 = 1. \tag{4}$$

Умножаем на t^n

$$t^n x_{n+1} = t^n x_n + t^n(n+1), \ \ x_0 = 1. \tag{5}$$

Суммируем

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n x_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n (n+1), \ \ x_0 = 1. \tag{6}$$

[1] Иванов Б.Н. Дискретная математика, М.: 2007, с. 148-150.

Находим соответствующие производящие функции. По определению $\sum_{n=0}^{\infty} t^n x_n = U(t)$. Найдем производящую функцию

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_{n+1} = (1/t) \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} x_{n+1}$$

$$(U(t) - x_0)/t = U(t) + \frac{1}{(1-t)^2} \tag{7}$$

При $x_0 = 1$

$$U(t) = \frac{1 - t + t^2}{(1-t)^3} = (1 - t + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} t^n \tag{8}$$

или

$$U(t) = \frac{1 - t + t^2}{(1-t)^3} = (1 - t + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} C_2^{n+2} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \tag{9}$$

Сравнивая коэффициенты, получаем

$$x_n = C_2^{n+2} - C_2^{n+1} + C_2^n = (n^2 + n + 2)/2.$$