Задача

Найти последовательность x_n, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$x_{n+2} = 13x_{n+1} - 12x_n, \tag{1}$$

$x_0 = 0,\ x_1 = 1.$

Решение

Производящая функция имеет вид

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k.$$

Вспомогательную функцию разложим на множители:

$$K(t) = 1 - 13t + 12t^2 = (12t - 1)(t - 1).$$

Умножим

$$K(t)U(t) = x_0 + (x_1 - 13\,x_0)\,t + (-13\,x_1 + 12\,x_0 + x_2)\,t^2 +$$
$$+(12\,x_1 - 13\,x_2 + x_3)\,t^3 + (-13\,x_3 + x_4 + 12\,x_2)\,t^4 + \ldots$$

С учетом (1) и начальных значений $x_0 = 0, x_1 = 1$ получим

$$K(t)U(t) = x_0 + (x_1 - 13\,x_0)\,t = t = C(t).$$

Найдем

$$U(t) = \frac{C(t)}{K(t)} = \frac{t}{(12t-1)(t-1)}.$$

Методом неопределенных множителей[1] представим это выражение в виде

$$U(t) = \frac{1}{11(t-1)} - \frac{1}{11(12t-1)}.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad \frac{1}{1-12t} = \sum_{k=0}^{\infty} 12^k t^k.$$

Отсюда

$$U(t) = (1/11)\sum_{k=0}^{\infty}(12^k - 1)t^k$$

Следовательно, $x_k = (12^k - 1)/11$.

---

[1]Напомним метод неопределенных множителей, использовавшийся ранее при вычислении неопределенных интегралов. Представим, например, дробь $\frac{ax+b}{(1+mx)(1+nx)}$ в виде суммы с неопределенными коэффициентами A и B:

$$\frac{ax+b}{(1+mx)(1+nx)} = \frac{A}{1+mx} + \frac{B}{1+nx}$$

Приравниваем числители

$$ax + b = A(1+nx) + B(1+mx).$$

Из равенства коэффициентов при x в различных степенях (в данном случае при x^0 и x^1) имеем два уравнения

$$b = A + B,$$
$$a = An + Bm.$$

Решаем эту систему. Находим A и B.