(1.1) на z и интегрируем по площади сечения. Так как приращение деформации срединной поверхности стержня $\Delta\varepsilon_0$ не зависит от z, а для симметричного относительно оси y сечения статический момент $\int_\Omega z d\Omega$ равен нулю, то получим

$$\int\limits_\Omega \Delta\varepsilon z d\Omega = J\Delta v_{,yy}, \tag{1.2}$$

$J = \int_\Omega z^2 d\Omega$ — момент инерции поперечного сечения стержня. Уравнение равновесия (моментов) отсеченной части стержня относительно точки на срединной линии сечения дает

$$\int\limits_\Omega \Delta\sigma z d\Omega = -T\Delta v, \tag{1.3}$$

где $T = \int_\Omega \sigma d\Omega$ — нагрузка, действующая на стержень в продольном направлении. В случае линейной упругости приращения напряжений и деформаций связаны законом Гука

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon. \tag{1.4}$$

Умножим это уравнение на z и проинтегрируем по площади Ω. Интегралы от $z\Delta\varepsilon$ и $z\Delta\sigma$ выразим через (1.2) и (1.3). Получим

$$EJ\Delta v_{,yy} + T\Delta v = 0. \tag{1.5}$$

Форму прогиба выберем в виде, удовлетворяющем условию шарнирного опирания ($\Delta v = \Delta v = 0$ при $y = 0$ и $y = l$)

$$\Delta v = U_0 \sin\mu y, \tag{1.6}$$

где μ — параметр волнообразования, $\mu = m_1\pi/l$, m_1 — число полуволн по длине стержня. Получим

$$U_0 \sin\mu y(-\mu^2 EJ + T) = 0.$$

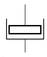
Из условия $U_0 \neq 0$ получим обычным образом критическую нагрузку

$$\sigma = T/\Omega = \sigma_0 = EJ\mu^2/\Omega = E\kappa_c, \tag{1.7}$$

где введено обозначение жесткости стержня $\kappa_c = J\mu^2/\Omega$.

1.2. Реологические модели

Напряженно-деформированное состояние тела в общем случае трехмерно, и описать его свойства с помощью простых моделей невозможно. Однако в тех частных случаях, когда деформирование одноосное, качественное поведение материала наглядно и просто можно представить простейшими структурными элементами. Более того, мы будем принимать что эти элементы обладают линейными характеристиками, т.е.

в определяющие соотношения напряжения и деформации (и их скорости) входят линейно. Основными структурными элементами являются упругий элемент  с определяющим соотношением в форме закона Гука $\sigma = E\varepsilon$ и вязкий элемент  с определяющим соотношением ньютоновского типа $\dot{\varepsilon} = \sigma/\eta$. Заметим, что для описания эффекта пластичности используется также элемент типа "сухое трение", и элемент "нить"для объяснения "зуба пластичности". Кроме того, соотношения между напряжениями и деформациями можно брать нелинейными. Основой структурного подхода описания свойств материала является простая идея о двух принципиально различных способах объединения элементов — параллельном и последовательном. Так конструируя материал из основных элементов можно задать широкий спектр свойств предполагаемому материалу или математически описать известные (наблюдаемые в эксперименте) эффекты.

Известны три простейшие модели линейного тела [21], [50], [68], [71].

1.2.1. Модель Максвелла. Последовательное соединение двух основных элементов (рис. 3) дает модель твердого тела, обладающего свойствами жидкости. Найдем математическую модель такого тела. Пусть ε_1 — деформация упругого элемента, а ε_2 — деформация вязкого. Так как при последовательно соединении напряжения в каждом элементе одно и тоже σ. Если точнее, то одинаковы, конечно, усилия, поэтому для простоты полагается, что сечения элементов модели одинаково.

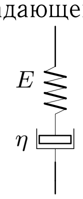


Рис. 3

Имеем два очевидных соотношения

$$\varepsilon_1 = \sigma/E, \ \dot{\varepsilon}_2 = \sigma/\eta. \tag{1.8}$$

Кроме того,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{1.9}$$

Дифференцируя первое соотношение (1.8) и (1.9), получаем искомую связь напряжений и деформаций материала

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \sigma/\eta. \tag{1.10}$$

Проанализируем это соотношение на двух стандартных испытаниях — поведение модели при постоянной нагрузке и при постоянной деформации. Если напряжение σ в элементе постоянное, то скорость деформации также постоянна и деформирование ничем не ограничено $\varepsilon = \sigma/\eta t + \varepsilon_0$. Несмотря на предельную простоту, такая модель поведения материала хорошо описывает ползучесть многих материалов, например, бетона и полимерных материалов. Для более точного описания ползучести линейная зависимость заменяется нелинейной, сохраняя при этом главное — последовательное соединение элементов. Второй тест — тест на релаксацию. Пусть элемент загружен некоторым напряжением σ_0 и деформация зафиксирована. Последим, как меняется напряжение в модели со временем. Интегрируя (1.10) при $\dot\varepsilon = 0$, получим $\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}$, где $\tau = \eta/E$ — время релаксации.

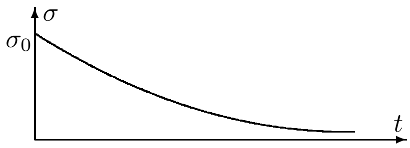


Рис. 4

Напряжение в элементе стремится к нулю. В реальных твердых телах напряжение до нуля не релаксирует. Чтобы описать релаксации более точно, используют более сложные модели.

1.2.2. Модель Фойгта. Другая простейшая модель твердого тела состоит из параллельно соединенных элементов упругости и вязкости (рис. 5). При таком соединении деформация элементов будет одна и та же, а напряжение состоит из суммы напряжений в правой и левой ветви $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Учитывая соотношения $\sigma_1 = E\varepsilon$, $\sigma_2 = \eta\dot\varepsilon$, получим

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot\varepsilon \tag{1.11}$$

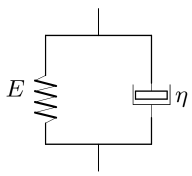


Рис. 5

Проинтегрируем (1.11) при нулевых начальных условиях $\varepsilon(0) = 0$. Ползучесть материала при постоянном напряжении ($\dot\sigma = 0$) описывается экспоненциальным законом

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0(1 - e^{-t/\tau})}{E} \tag{1.12}$$

1.2.3. Модель Кельвина. Соединим последовательно элемент Фойгта и упругий элемент. Исходя из свойств последовательного соединения, которые были уже использованы при конструировании элемента Максвелла, запишем выражение для общей деформации

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{1.13}$$

где ε_1 — деформация элемента Фойгта, а ε_2 — деформация упругого элемента.

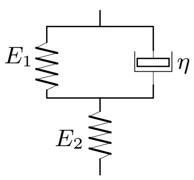


Рис. 6

Напряжение σ в элементах одинаковое. Для элемента Фойгта имеем определяющее соотношение (1.11)

$$\sigma = E_1\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_1 \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_2 = \sigma/E_2 \tag{1.15}$$

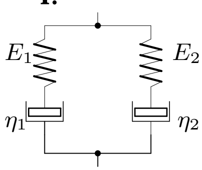
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{1.16}$$

Стандартное линейное тело

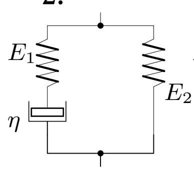
$$\dot{\sigma} + \sigma(E_1 + E_2)/\eta = \varepsilon E_1 E_2/\eta + \dot{\varepsilon} E_1 \tag{1.17}$$

1.2.4. Задачи. Вывести определяющее соотношение для среды с заданной структурной моделью.

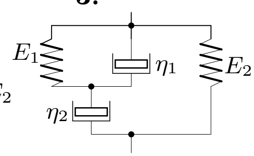
1.



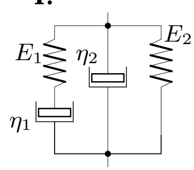
2.



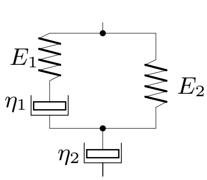
3.



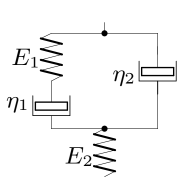
4.



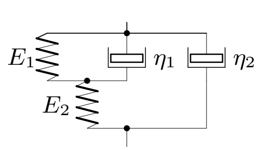
5.



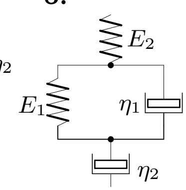
6.



7.



8.



Ответы