противления воздуха пропорциональна скорости, подъемная сила $F = const$. На сколько метров после этого еще опустится шар?

Ответы к задачам см. в табл. 14 на с. 257.

Примеры решений

Задача 1. С аэростата сбросили балласт, падение аэростата замедлилось, и через время t_0 он поднялся на ту высоту, с которой сбросили балласт. Сила сопротивления воздуха R=const, подъемная сила аэростата — $\vec{T}$, масса аэростата без балласта — m. Сколько времени после сброса балласта аэростат опускался?

Решение

Ось y направим вверх, поместив ее начало в нижней точке траектории аэростата. При падении на аэростат действуют силы тяжести $G = mg$, сила сопротивления воздуха R и подъемная сила T (рис. 89). Аэростат принимаем за материальную точку. Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось y имеет вид:

$$m\ddot{y} = T + R - G.$$

Дважды интегрируем уравнение движения. Для постоянных сил интеграл берется просто:

$$m\dot{y} = (T + R - G)t + C_1,$$

$$my = (T + R - G)t^2/2 + C_1 t + C_2.$$

Начальные условия: $t = 0$, $y = H$, $\dot{y} = -v_0$. Отсюда находим константы интегрирования $C_1 = -mv_0, C_2 = mH$. Получаем уравнения

$$\dot{y} = (T + R - G)t/m - v_0, \tag{3.1}$$
$$y = (T + R - G)t^2/(2m) - v_0 t + H. \tag{3.2}$$

Аналогично составляем уравнение при подъеме аэростата.

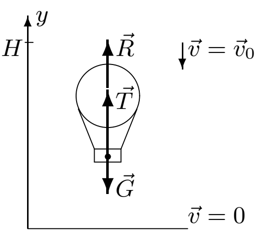

Рис. 89

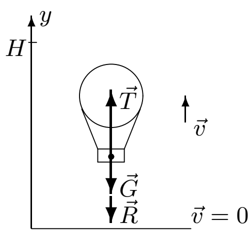

Рис. 90

Сила сопротивления при этом меняет свое направление (рис. 90). Оставляя ось y прежней, время отсчитываем с момента подъема:

$$m\ddot{y} = T - R - G.$$

Дважды интегрируем по времени это уравнение. Получаем сначала $m\dot{y} = (T - R - G)t + C_3$, затем

$$my = (T - R - G)t^2/2 + C_3 t + C_4. \tag{3.3}$$

Начальные условия: $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$. Находим константы интегрирования: $C_3 = 0, C_2 = 0$. Из (3.3) следует

$$y = (T - R - G)t^2/(2m). \tag{3.4}$$

Находим искомое время падения. Обозначаем его t_1, а время подъема — t_2. По условию $t_1 + t_2 = t_0$. Подставляем в (3.1), (3.2) условия: $t = t_1$, $\dot{y} = 0$, $y = 0$, а в (3.4) $t = t_2$, $y = H$. Получаем систему трех уравнений с неизвестными t_1, H, v_0:

$$\begin{aligned} &0 = (T + R - G)t_1/m - v_0,\\ &0 = (T + R - G)t_1^2/(2m) - v_0 t_1 + H,\\ &H = (T - R - G)(t_0 - t_1)^2/(2m). \end{aligned}$$

Исключая неизвестную высоту H и неизвестную начальную скорость v_0, получаем

$$t_1 = t_0/\left(1 + \sqrt{(T + R - mg)/(T - R - mg)}\right).$$

Задача 2. Грузовик массой m имеет максимальную скорость $v_{\max}$ и разгоняется с места до v_* за время t_*. Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равна средняя сила тяги двигателя грузовика?

Решение

Ось x системы координат принимаем горизонтальной, начало координат помещаем в начальное положение грузовика. Изображаем грузовик в некоторый промежуточный момент движения. На него действует

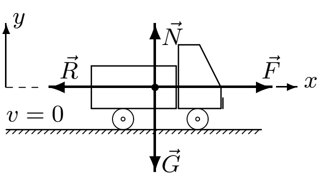

Рис. 91

сила тяжести $G = mg$, сила сопротивления $R = kv$, пропорциональная скорости v, с неизвестным пока коэффициентом k, неизвестная сила тяги F и реакция опоры N (рис. 91).

Составляем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F - R.$$

Дважды интегрируем уравнение движения. Так как правая часть уравнения является функцией скорости, а в вопросе задачи содержится время, вводим замену $v = \dot{x}$ и интегрируем уравнение с разделяющимися переменными t и v:

$$\frac{mdv}{F - kv} = dt,$$

$$-(m/k)\ln(F - kv) = t + C_1.$$

Начальные условия: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v = 0$. Так как в этой задаче не идет речь о расстояниях, то интегрировать второй раз и использовать условие на координату x не требуется. Из условия на скорость находим константу интегрирования $C_1 = -(m/k)\ln(F)$. Зависимость скорости от времени движения принимает вид

$$-(m/k)\ln(1 - kv/F) = t. \qquad (3.5)$$

Находим искомую силу тяги F грузовика, считая ее постоянной. Для этого используем все имеющиеся в задаче данные. Известна максимальная скорость $v = v_{\max}$. Необходимым условием экстремума функции $v = v(t)$ является равенство $dv/dt = 0$ или $m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0$. Отсюда: $k = F/v_{\max}$. Подставляем это соотношение в (3.5), откуда, при $t = t_*$ и $v = v_*$, получаем среднюю силу тяги грузовика

$$F = \frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\left(\frac{v_{\max}}{v_{\max} - v_*}\right).$$